



UNA TRAVE A FIBRE PER LA MODELLAZIONE DELL'INTERAZIONE N-M-V DI ELEMENTI IN CEMENTO ARMATO

Paolo Tortolini, Marco Petrangeli, Enrico Spacone
Dipartimento di Ingegneria – Facoltà di Architettura Università “G.D’Annunzio”, Pescara.

Keywords: Trave a fibre, taglio, dual section, cemento armato, elementi finiti, analisi non lineare.

ABSTRACT

L'articolo descrive un trave a fibre, che è in grado di trattare efficacemente l'interazione completa di tutte le caratteristiche di sollecitazione (N-M-V), sia in relazione a condizioni di carico monotone che cicliche. L'elemento si propone quindi come un valido strumento nel campo della analisi sismica delle strutture in cemento armato. Tale modello rappresenta un'evoluzione della trave con taglio di Petrangeli et al. (1999), con cui infatti condivide l'architettura generale e le principali caratteristiche. La strategia di soluzione dell'elemento è attuata con un approccio in forze. Il legame costitutivo utilizzato per il calcestruzzo è derivato dalla famiglia di modelli *microplane*. L'algoritmo si basa sulle ipotesi di sezioni piane e perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo sia relativamente alle armature longitudinali che trasversali. La caratteristica distintiva di questo modello risiede nell'ipostazione con cui si affronta il problema dell'individuazione della distribuzione delle deformazioni di taglio sulla sezione. Si adotta infatti una strategia di soluzione che si basa su considerazioni di carattere statico, mentre il modello precedente era definito mediante un approccio cinematico, utilizzando delle classiche funzioni di forma mutuata dalla teoria elastica di Jourawski. Questo nuovo approccio garantisce l'equilibrio e la congruenza tra il livello sezionale e quello più interno di fibra. Esso viene denominato *Dual Section*, poiché si basa sull'equilibrio tra l'azione tangenziale sviluppata tra due sezioni adiacenti e lo scambio di azioni assiali tra le due medesime sezioni.

1 INTRODUZIONE

Nel campo della modellazione di elementi mono-dimensionali il tema dell'interazione degli effetti taglianti con quelli assiali e viceversa, rappresenta una tematica tutt'altro che esausta. Essa ha goduto ieri e gode oggi di un notevole interesse scientifico. Infatti, nel campo della modellazione di elementi finiti uni-dimensionali, la trave con taglio rappresenta uno dei pochi argomenti ancora degni di attenzione, in quanto gli elementi a fibre classici risultano ormai definiti in tutti gli aspetti principali e la ricerca si può occupare solamente di tematiche di contorno che ne possano arricchire il campo di applicazione (quali ad esempio i fenomeni di sfilamento-scorrimento delle armature).

Dalla letteratura si possono individuare almeno tre diversi approcci alla problematica della trave con taglio in campo non lineare:

- i modelli che utilizzano schemi di tirante puntone (Gaudes et al. 1994 e 1997), (Ranzo and Petrangeli, 1998);

- i modelli che utilizzano legami di fibra di tipo *microplane* (Petrangeli et al., 1999);
- i modelli che utilizzano legami di fibra MCTF o *smearred crack* (Vecchio e Collins, 1988), (Gregori et al. 2007), (Ceresa et al. 2009).

Una completa panoramica dei diversi modelli si può trovare in (Ceresa et al., 2007).

Il substrato dell'elemento qui presentato è da individuare nell'ambito degli studi di meccanica computazionale sviluppati della scuola romana negli anni '90. L'algoritmo di elemento con approccio in forze si basa infatti su soluzioni iterative sviluppate da Spacone et al. (1996) e Petrangeli e Ciampi (1997), mentre l'impostazione generale del problema del taglio si deve a Petrangeli et al. (1999).

2 L'ELEMENTO DI TRAVE CON TAGLIO

La trave è caratterizzata da tre livelli annidati:

- i. Elemento
- ii. Sezione
- iii. Fibra

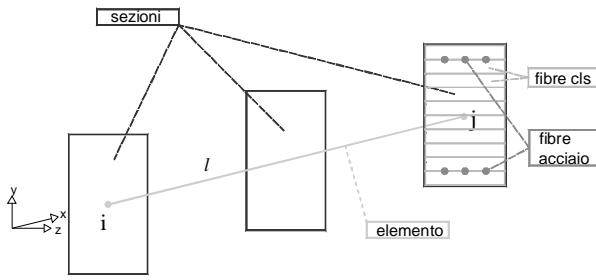


Figura 1. Definizione di elemento di trave 2D

A livello di fibra sono contenute le leggi costitutive del materiale (acciaio e calcestruzzo). La sezione rappresenta il campo di integrazione delle risposte delle fibre, attraverso cui si ottengono le caratteristiche di sollecitazione (M, N, V). L'integrazione delle risposte di sezione conduce alla definizione delle forze nodali, che rappresentano il punto di arrivo dell' algoritmo di elemento, il cui dato di input sono gli spostamenti nodali imposti (*state determination*).

2.1 Le relazioni elemento - sezioni

Considerando la condizione isostatica della trave nel piano (depurata dai moti rigidi), le deformazioni da considerare per l'elemento sono l'accorciamento (o allungamento) della trave e le due rotazioni alle estremità. Il vettore che racchiude tali grandezze è definito vettore delle deformazioni di elemento:

$$Q = (\varepsilon; r_i; r_j)^T \quad (1)$$

Mentre le forze nodali corrispondenti sono racchiuse nel vettore:

$$P = (N; M_i; M_j)^T \quad (2)$$

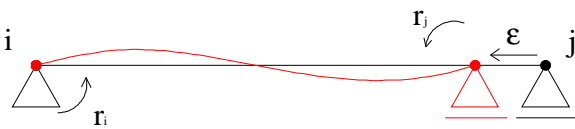


Figura 2. Configurazione isostatica principale della trave piana e sua cinematica

A livello di sezione, invece, si definiscono le seguenti grandezze generalizzate: la deformazione assiale, la curvatura e la deformazione tagliante. Esse sono racchiuse nel vettore delle deformazioni generalizzate:

$$q(x) = (\varepsilon; \varphi(x); \gamma(x))^T \quad (3)$$

a cui corrisponde il vettore delle sollecitazioni generalizzate di sezione:

$$p(x) = (N(x); M(x); V(x))^T \quad (4)$$

dove (x) sta ad individuare la posizione della sezione lungo la trave .

Esiste una correlazione esatta tra il vettore delle forze nodali e quello delle sollecitazioni di sezione:

$$p(x) = b(x) \cdot P \quad (5)$$

dove $b(x)$ è una matrice che racchiude le funzioni di forma della sollecitazioni lungo l'elemento, chiamate anche integrali di equilibrio, in quanto sono ottenute esclusivamente dalle condizioni di equilibrio della trave.

La correlazione tra il campo delle deformazioni nodali e delle deformazioni generalizzate di sezione si ricava applicando il Principio dei Lavori Virtuali (PLV):

$$Q = \int_l b(x)^T q(x) dl \quad (6)$$

Inoltre, la relazione che lega le sollecitazioni di sezione alle deformazioni generalizzate può essere espressa in forma esplicita (legame sezionale), grazie ai legami di fibra, a loro volta espliciti:

$$p(x) = p(q(x)) \quad (7)$$

Il processo inverso si può esprimere solo in forma incrementale tramite:

$$dq(x) = f(x) \cdot dp(x) \quad (8)$$

dove $f(x)$ è la matrice inversa di quella di rigidezza, denominata matrice di flessibilità di sezione.

La trattazione del problema della ricerca delle forze nodali associate ad imposte deformazioni di elemento, di seguito presentata, risulta una parziale rivisitazione di quella fornita da Petrangeli e Ciampi (1997).

Considerato un fissato incremento di deformazioni di elemento ΔQ che determina il nuovo passo di carico, il corrispondente incremento del campo di sezione viene ottenuto da una soluzione particolare $\Delta q_0(x)$, quindi tale che:

$$\Delta Q = \int_l b(x)^T \Delta q_0(x) dl$$

corretto da una serie di funzioni omogenee $r q_i(x)$:

$$\Delta q_i(x) = \Delta q_0(x) + \sum_i r q_i(x) \quad (9)$$

Le correzioni sono ottenute in conseguenza della divergenza tra le sollecitazioni generalizzate generate dal legame sezionale $\Delta p_{i-1}(x) = \Delta p(\Delta q_{i-1}(x))$, che si basa su un campo

di deformazioni approssimato, e le sollecitazioni derivanti dall'equilibrio della trave $\Delta p_i(x) = b(x)\Delta P$:

$$rp_i(x) = \Delta p_i(x) - \Delta p_{i-1}(x) \quad (10)$$

$$rq_i(x) = f(x)(\Delta p_i(x) - \Delta p_{i-1}(x)) \quad (11)$$

La condizione di omogeneità di questi termini correttivi,

$$\bar{0} = \int_l b(x)^T rq_i(x) dl$$

implica che:

$$\Delta P_i = F^{-1} \int_l b(x)^T f(x) \Delta p_{i-1}(x) dx \quad (12)$$

con F che rappresenta la matrice di rigidezza di elemento:

$$F = \int_l b(x)^T f(x) b(x) dx \quad (13)$$

La (12) mostra che le forze nodali della i -esima iterazione sono esclusivamente dipendenti dall'iterazione precedente.

Il processo iterativo può essere interrotto, ovvero è raggiunta la convergenza, quando la differenza valutata tramite la (10) e mediata sull'intero elemento, è ritenuta accettabile:

$$\int_l rp_i^T f(x) rp_i dx \leq E_{lim} \quad (14)$$

Si evidenzia che l'algoritmo utilizzato, lavora con vettori totali e non incrementali. Infatti, tutte le relazioni precedenti risultano ugualmente valide e la procedura si rivela più vantaggiosa, sia perché i residui tra un passo di carico ed il successivo vengono ereditati dal nuovo passo, sia perché i legami costitutivi di fibra, che determinano le relazioni deformazioni-sollecitazioni generalizzate di sezione, lavorano con grandezze totali.

Una descrizione visiva del procedimento della *state determination* è riportato in figura 3.

2.2 Le relazioni sezione - fibre

La sezione rappresenta l'entità intermedia tra la trave e le fibre. In essa viene integrata mediante sommatoria la risposta delle fibre per ottenere le sollecitazioni generalizzate di sezione $(N(x), M(x), V(x))$. Nella sezione si distinguono fibre di acciaio e fibre di calcestruzzo. Entrambe

sono caratterizzate dalla rispettiva area e posizione sulla sezione.

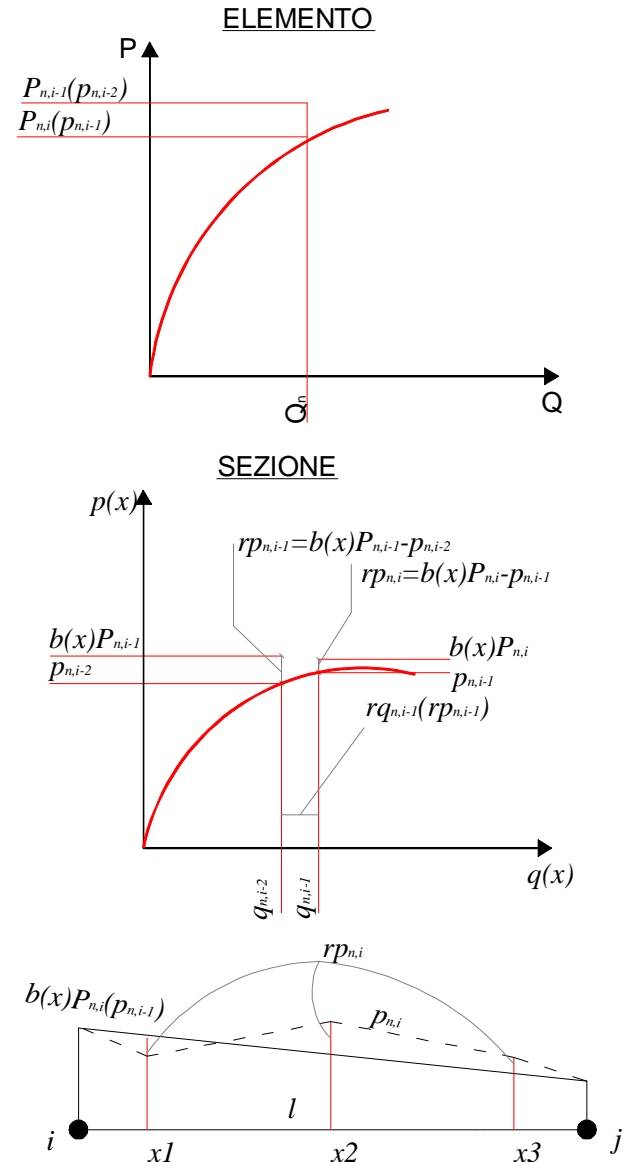


Figura 3. State determination di elemento

Nell'ipotesi di geometria delle sezioni ed armature costanti lungo l'elemento è possibile eliminare la dipendenza di tali termini dalla sezione (x) :

$$A_{xx,j}^s, \quad y_j^s, \quad j = 1..n_{fs}$$

$$A_{xx,k}^c, \quad y_k^c, \quad k = 1..n_{fc}$$

dove l'apice $^{s/c}$ indica il tipo di fibra ($s=steel$, $c=concrete$), mentre il pedice $_{k/j}$ identifica la fibra. Inoltre, è necessario collegare alle fibre di calcestruzzo un'area in direzione trasversale, y :

$$A_{yy,k}^c, \quad k = 1..n_{fc}$$

ed una percentuale di armatura trasversale ad essa associata (fig. 4):

$$\rho_{yy,k} = A_{yy,k}^s / A_{yy,k}^c, \quad k = 1 \dots n_{fc}$$

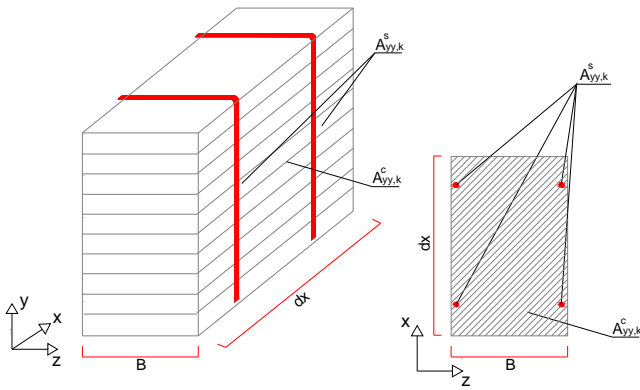


Figura 4. Definizione delle aree laterali di fibra

La fibra di acciaio possiede un comportamento esclusivamente uniassiale (lungo l'asse della trave), ad essa è associato il legame costitutivo di Menegotto e Pinto (1977), espresso formalmente tramite:

$$\sigma_{xx}^s = f(\varepsilon_{xx}^s) \quad (15)$$

Alla fibra di calcestruzzo è collegato un legame costitutivo piano (oggetto del paragrafo successivo), esprimibile attraverso:

$$(\sigma_{xx}^c; \sigma_{yy}^c; \tau_{xy}^c) = D(\varepsilon_{xx}^c; \varepsilon_{yy}^c; \varepsilon_{xy}^c) \quad (16)$$

Le deformazioni di fibra sono individuate in funzione di quelle di sezione. La deformazione assiale (sia per le fibre di acciaio che di calcestruzzo) è ottenuta a partire dall'ipotesi di sezioni piane e perfetta aderenza:

$$\varepsilon_{xx,j}^s(x) = \varepsilon - \varphi(x) \cdot y_j^s \quad j = 1 \dots n_{fs} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{xx,k}^c(x) = \varepsilon - \varphi(x) \cdot y_k^c \quad k = 1 \dots n_{fc} \quad (18)$$

La deformazione laterale del calcestruzzo viene ricavata imponendo l'equilibrio tra l'azione, in tale direzione, associata al calcestruzzo e quella opposta all'armatura laterale (che utilizza un legame elasto-plastico):

$$\sigma_{yy,k}^c + \rho_{yy,k} \cdot \sigma_{yy,k}^s(\varepsilon_{yy,k}^c(x)) = 0 \quad (19)$$

La ricerca della deformazione laterale, soluzione della (19), prevede un processo iterativo (iterazioni di fibra). Si parte da una soluzione di tentativo, individuata nel comportamento piano perfettamente elastico del calcestruzzo, poi corretta, nelle diverse iterazioni, dai residui ottenuti applicando la (19), trasformati in deformazione:

$$\varepsilon_{yy,k}^c = \nu \varepsilon_{xx,k}^c + r \varepsilon_{yy,k}^{c,1} + \dots + r \varepsilon_{yy,k}^{c,i} \quad (20)$$

Infine, la deformazione tagliante delle fibre di calcestruzzo viene ricavata attraverso una considerazione statica proposta in Vecchio e Collins (1988), procedura che è nota con il nome di *Dual Section (DS)*. Per la statica della trave, la variazione di momento lungo l'elemento determina lo sviluppo di un'azione di taglio:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (21)$$

Sulla base di questa relazione e considerato che la variazione di momento è legata ad una variazione della distribuzione delle tensioni assiali tra due sezioni adiacenti, n e $n+1$, (da qui il nome *Dual Section*), è possibile individuare la distribuzione esatta delle tensioni tangenziali di fibra sulla sezione. Infatti, individuata una porzione di sezione, la variazione dell'azione normale agente su di essa, valutata tra due sezioni adiacenti, risulta pari alla forza di scorrimento scambiata a livello di fibra:

$$F_{xy,k} = (F_{xx,1-k}^c(x_{n+1}) + F_{xx,1-k}^s(x_{n+1})) - (F_{xx,1-k}^c(x_n) + F_{xx,1-k}^s(x_n)) \quad (22)$$

dove con i termini $F_{xx,1-k}^c$ e $F_{xx,1-k}^s$ si indicano le risultanti delle forze assiali, valutate sulla porzione di sezione individuata dalla k -esima fibra di calcestruzzo, come chiarito in figura 5. Dunque, riscrivendo la (22) in termini tensionali, si ottiene la tensione tangenziale della k -esima fibra:

$$\tau_{xy,k}^c \Big|_{DS} = \frac{\left(\sum_1^k \sigma_{xx,k}^c(x_{s+1}) A_{xx,k}^c + \sum_1^k \sigma_{xx,k}^s(x_{s+1}) A_{xx,k}^s \right)}{B(x_{n+1} - x_n)} - \frac{\left(\sum_1^k \sigma_{xx,k}^c(x_s) A_{xx,k}^c + \sum_1^k \sigma_{xx,k}^s(x_s) A_{xx,k}^s \right)}{B(x_{n+1} - x_n)} \quad (23)$$

dove B rappresenta la base della sezione (rettangolare e costante lungo l'elemento).

In generale, la distribuzione delle tensioni tangenziali lungo la sezione, ottenuta a partire da una distribuzione di deformazioni taglianti sulla la sezione non corretta (ad esempio utilizzando delle funzioni di forma prestabilite), non risulta in equilibrio con quella ottenuta grazie all'equazione (23):

$$\tau_{xy,k}^c(x) - \tau_{xy,k}^c \Big|_{DS} = r \tau_{xy,k}^c \quad (24)$$

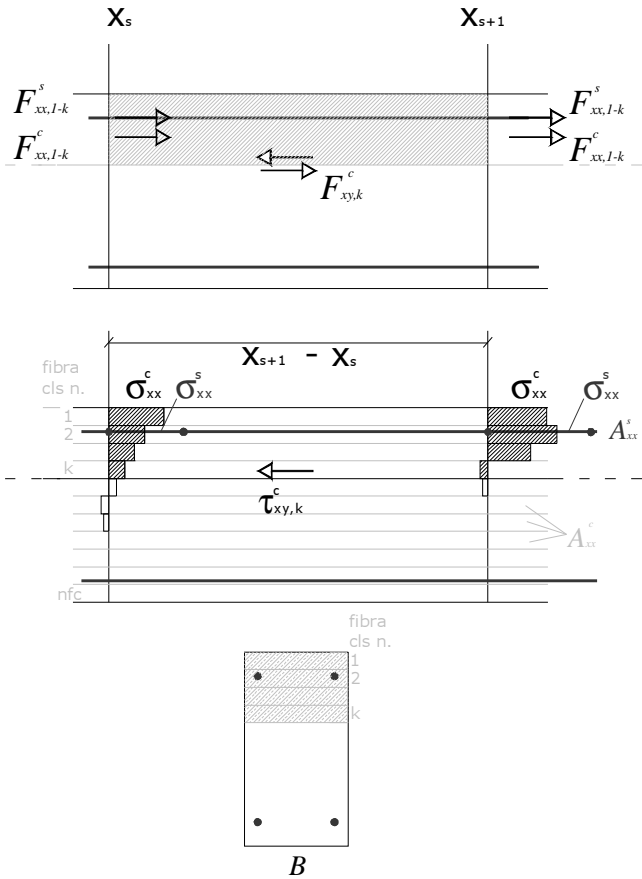


Figura 5. Forza di scorrimento e tensione tangenziale di fibra, determinate dallo scambio di azioni longitudinali tra due sezioni adiacenti (*Dual Section*)

Quindi è necessario correggere la distribuzione ipotizzata per minimizzare tale divergenza. Anche in questo caso, si rende necessaria una procedura iterativa. Tuttavia, a differenza di quanto succede per la deformazione laterale di fibra, non è possibile applicare esclusivamente i residui deformativi ottenuti dal non soddisfacimento della (24), in quanto, altrimenti, si andrebbe a violare la congruenza con il campo di deformazione sezionale, infatti deve essere sempre garantito che:

$$\gamma(x) = \frac{\sum_{k=1}^{nfc} \epsilon_{xy,k}^c(x) A_{xx,k}^c}{\sum_{k=1}^{nfc} A_{xx,k}^c} \quad (25)$$

Pertanto la deformazione tangenziale di fibra corretta viene individuata attraverso:

$$\epsilon_{xy,k}^c = \epsilon_{xy,k}^{c0} + (r\epsilon_{xy,k}^{c,1} - g(y_k)R_\gamma^1(x)) + \dots + (r\epsilon_{xy,k}^{c,i} - g(y_k)R_\gamma^i(x)) \quad (26)$$

dove $\epsilon_{xy,k}^{c0} = g(y_k)\gamma(x)$ è il termine particolare valutato secondo una distribuzione iniziale (di tentativo), mentre $(r\epsilon_{xy,k}^{c,i} - g(y_k)R_\gamma^i(x))$ rappre-

sentano dei termini di correzione omogenei, cioè tali che:

$$\frac{\sum_{k=1}^{nfc} (r\epsilon_{xy,k}^{c,i} - g(y_k)R_\gamma^i(x)) A_{xx,k}^c}{\sum_{k=1}^{nfc} A_{xx,k}^c} = 0$$

con $g(y_k)$ funzione di forma della distribuzione delle deformazioni di taglio sulla sezione, utilizzata per dare avvio al processo iterativo.

La procedura iterativa termina una volta raggiunta un'accettabile convergenza, valutata integralmente sulla sezione:

$$\sum_{k=1}^{nfc} (\tau_{xy,k}^{c,i} - \tau_{xy,k}^{c,i} |_{DS}) A_{xx,k}^c = R_\tau \leq S_{lim} \quad (27)$$

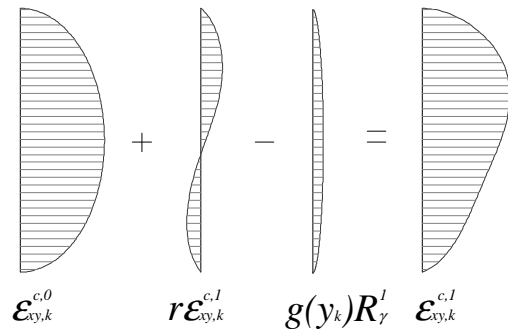


Figura 6. Deformazioni taglianti di fibra sulla sezione

Questa procedura di correzione non può essere effettuata fibra per fibra (come invece avviene per la correzione delle deformazioni laterali $r\epsilon_{yy}^c$), ma risulta necessario conoscere i residui su tutta la sezione per effettuare la correzione omogenea (si deve valutare il termine integrale R_γ). Quindi, la procedura può essere effettuata solo richiamando la sezione (iterazioni di sezione) e quindi introducendo un nuovo ciclo annidato, che si posiziona intermedio tra le iterazioni di elemento e quelle di fibra.

Noti, dunque, i vettori delle deformazioni di fibra è possibile, attraverso i legami costitutivi (15) e (16), ricavare le risposte in termini tensionali. Infine, le sollecitazioni generalizzate vengono ottenute integrando sulla sezione le risposte di fibra, concludendo così il processo di associazione del campo di sollecitazioni generalizzate al dato campo di deformazioni di sezione. Questo processo è noto anche come *state determination* di sezione.

$$N(x) = \sum_{k=1}^{nfc} \sigma_{xx,k}^c(x) A_{xx,k}^c + \sum_{j=1}^{nfs} \sigma_{xx,j}^s(x) A_{xx,j}^s \quad (28)$$

$$M(x) = \sum_{k=1}^{nfc} \sigma_{xx,k}^c(x) A_{xx,k}^c y_k^c + \sum_{j=1}^{nfs} \sigma_{xx,j}^s(x) A_{xx,j}^s y_j^s \quad (29)$$

$$V(x) = \sum_{k=1}^{nfc} \tau_{xy,k}^c(x) A_{xx,k}^c \quad (30)$$

2.3 Il legame costitutivo del calcestruzzo

Come già anticipato, il legame costitutivo utilizzato per il calcestruzzo è bidimensionale, (16). Tale modello è stato oggetto di trattazioni specifiche da parte degli stessi autori (Tortolini, 2011), (Tortolini et al., 2009), (Petrangeli, 1999), tuttavia appare utile fornire, in questo contesto, una sintetica descrizione delle sue principali caratteristiche.

Il modello trae origine dalla teoria dei micropiani (Bazant e Prat, 1988). In base ad essa, il comportamento di un materiale (nel piano o nello spazio) viene rappresentato attraverso un insieme di superfici (i micropiani), dove vengono definite delle leggi costitutive esplicite. Il comportamento globale (macroscopico) è, quindi, ottenuto a partire dai contributi dei singoli micropiani: si parla perciò di risposta integrale. Tradizionalmente tali modelli sono basati su vincoli cinematici, i quali permettono di definire le deformazioni di micropiano ($e_{k,i}$) a partire dal vettore di deformazioni macroscopico ($\bar{\epsilon}$) attraverso relazioni geometriche. È possibile, infatti, definire l'operatore $A_{k,i}$, funzione dell'orientazione della giacitura, per cui le due componenti i (nel caso bidimensionale, una normale ed una tangenziale alla determinata giacitura) del vettore di deformazione di micropiano k sono:

$$e_{k,i} = A_{k,i}^T \bar{\epsilon} \quad i=1,2,3 \quad (31)$$

La correlazione tra le tensioni di micropiano e quelle macroscopiche è definita grazie al PLV, attraverso il quale il lavoro (sul cerchio C di raggio unitario) svolto a livello microscopico è uguagliato a quello condotto a livello macroscopico:

$$\frac{1}{2\pi} \int_C (d\bar{s} \cdot \delta \bar{\epsilon}) dS = d\bar{\sigma} \cdot \delta \bar{\epsilon} \quad (32)$$

I termini a sinistra delle (32) sono riferiti alla microscaletta mentre quelli a destra alla macroscaletta. Tuttavia, l'uguaglianza espressa in tale equazione è solo approssimata, a causa dell'imposizione cinematica della (31), (Bazant e Prat, 1988).

Il modello utilizzato in questo elemento, grazie a delle ipotesi di partenza vantaggiose supera i principali ostacoli dei modelli classici, che sono individuabili nella difficoltà di ottenere una corretta simulazione del comportamento del calcestruzzo sia a trazione che a compressione con un unico set di parametri di micro piano.

Il modello proposto considera la risposta del calcestruzzo composta da due contributi, uno elastico-lineare ed uno non lineare, in considerazione della sostanziale eterogeneità del materiale (composto da aggregato e pasta di cemento):

$$\bar{\epsilon}^c = \bar{\epsilon}_{strong}^c + \bar{\epsilon}_{weak}^c \quad (30)$$

Questa scomposizione cinematica (*weak & strong splitting*) è governata dal degrado del materiale, considerato tramite gli invarianti dello stato deformativo (volumetrico, ϵ_V , e deviatorico, ϵ_D) ed i parametri deformativi caratteristici del materiale (deformazioni al picco di trazione ϵ_{ct} , e di compressione, ϵ_{cc}).

$$\bar{\epsilon}_{strong}^c = \Psi_{split}(\epsilon_V; \epsilon_D; \epsilon_{ct}; \epsilon_{cc}) \cdot \bar{\epsilon}^c \quad (31)$$

Con questa impostazione risulta possibile fornire una rappresentazione realistica della risposta del calcestruzzo, nelle più diverse situazioni (Tortolini, 2011), considerando esclusivamente la componente ortogonale al micropiano ed utilizzando le consolidate leggi tensione-deformazione del calcestruzzo (Mander et al 1988).

3 CASI STUDIO

Il modello presentato è stato verificato sulla base di dati sperimentali riguardanti due colonne in cemento armato, sensibili ai meccanismi di taglio, realizzate presso i laboratori dell'Università di San Diego (Xiao, 1993). Tali provini (in scala 1 a 3) sono rappresentativi di pile da ponte realizzate con materiali e secondo le pratiche costruttive della California degli anni '60. I provini hanno medesima sezione 16" x 24" (410 mm x 610 mm) ed armatura costante lungo l'altezza. In dettaglio, essa è costituita da 22 barre size 6 ($\phi=19.05\text{mm}$), mentre le staffe (a due braccia con piegatura a 90°) sono realizzate con barre size 2 passo 5" ($\phi=6.35\text{mm}$ passo 127mm).

La modalità di prova è *double bending*, con altezza complessiva della colonna di 96" (2438 mm) e 72" (1829 mm), rispettivamente per il campione R1 e R5. Le due colonne si differenziano, inoltre, per la tipologia di acciaio dell'armatu-

ra *grade 40* per R1 e *grade 60* per R5. Anche i calcestruzzi utilizzati presentano delle sottili differenze tra i due campioni (tab.1).

Il carico verticale, mantenuto costante durante la prova, è pari a 507 kN ($\sigma_N=2.1\text{MPa}$, ossia circa il 5% del carico limite massimo, considerando una media delle tre resistenze del calcestruzzo).

Mentre il primo provino ha mostrato sperimentalmente un comportamento di carattere flessionale, evidenziando solamente una minima perdita di resistenza al termine della prova, la colonna R-5 ha manifestato una chiara rottura fragile per taglio.

Tabella 1. Principali caratteristiche dei campioni del test

	R-1	R-5
steel ratio (%)	2.5	2.5
aspect ratio (-)	2	1.5
compression (MPa)	-2.1	-2.1
f_{cc} (MPa)	-37.9	-32.7
$f_{y,bars}$ (MPa)	317	469
$f_{y,hoops}$ (MPa)	360	324

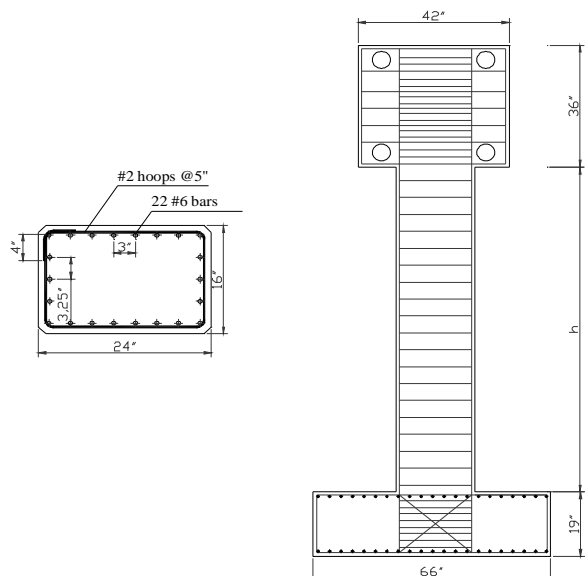


Figura 7. Sezione verticale e trasversale colonne testate

Ciascuna colonna è stata modellata con un elemento in *single bending*, quindi è stata assunta una lunghezza di elemento pari alla luce di taglio. L'integrazione sulla trave viene effettuata utilizzando due sezioni di Gauss. Infatti, dato che l'altezza della sezione è pari a circa la metà della lunghezza di elemento, la scelta di questo numero di sezioni risulta la migliore; un numero maggiore di sezioni condurrebbe ad una sottostima del peso della zona dove avviene il danno.

La sezione dell'elemento è stata discretizzata in 16 fibre di uguali dimensioni. L'armatura longitudinale è stata considerata nell'esatta posizione e considerando aree equivalenti di acciaio.

Per le caratteristiche dei materiali si è fatto riferimento ai valori disponibili, mentre quelli mancanti, ma necessari, per la definizione delle leggi del legame costitutivo *microplane*, sono stati ipotizzati come riportato in tabella 2. Le curve uniassiali di trazione e compressione dei calcestruzzi delle due colonne sono rappresentate in figura 8.

Tabella 2. Ulteriori parametri del calcestruzzo assunti

	R-1	R-5
ϵ_{cc} (%)	0.25	0.22
f_{ct} (MPa)	3.5	3.0
E_c (GPa)	25	22
ν	0.18	0.18

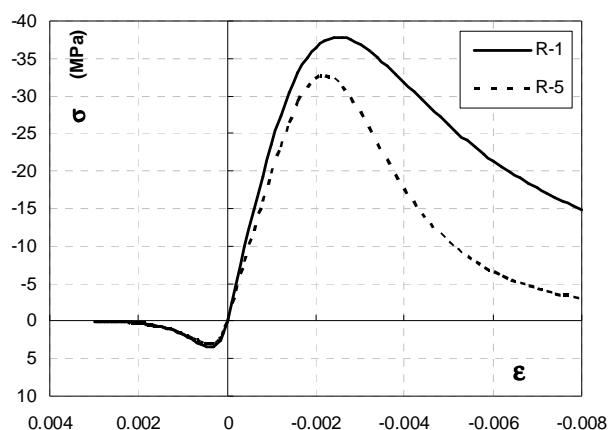


Figura 8. Leggi tensione-deformazione del calcestruzzo utilizzate all'interno del modello *microplane*

In figura 9 viene riportata la curva taglio-spostamento della colonna fornita dal modello di trave presentato. In entrambe le condizioni simulate (sia monotone che cicliche, le quali tuttavia non ripercorrono tutti i cicli effettuati nelle condizioni della prova sperimentale), si riscontra un'ottima corrispondenza della risposta. Il taglio massimo sviluppato dalla colonna (570kN) viene approssimato in maniera più che soddisfacente dal modello (545kN nel caso ciclico e 555kN nel caso monotono, in corrispondenza dello spostamento massimo della colonna, 36mm). Il modello numerico non evidenzia alcuna perdita di resistenza e la concordanza dei cicli di isteresi delle simulazioni cicliche, e quindi dell'energia sviluppata durante la prova sperimentale, risulta piuttosto evidente.

Questo caso di studio, che potrebbe non apparire appropriato ai fini di una validazione del modello di trave con taglio, è stato invece ritenuto significativo, e pertanto proposto, in quanto dimostra come l'algoritmo non riconduca a criticità per fenomeni di taglio, laddove non presenti.

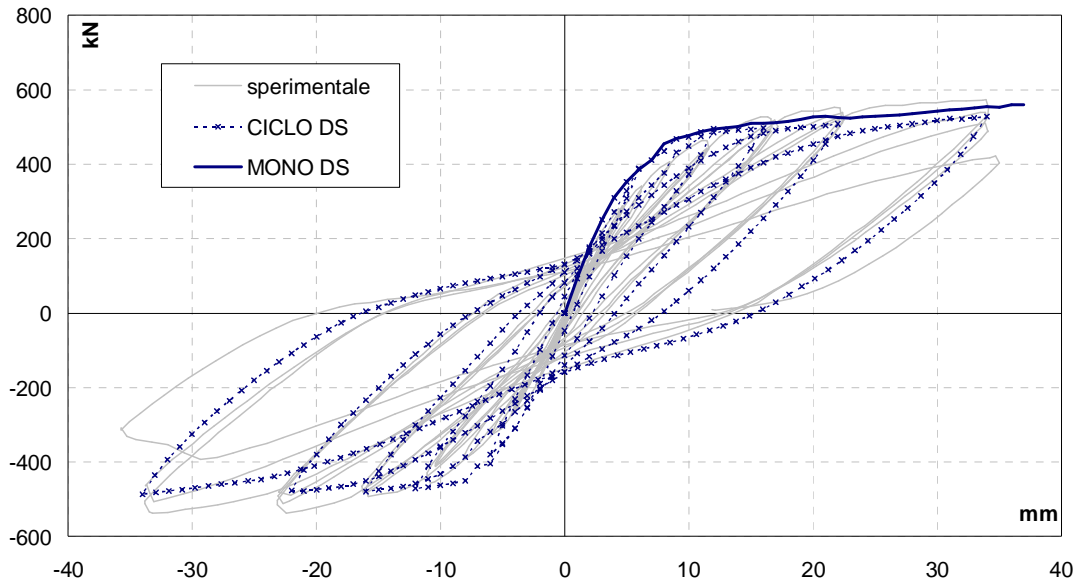


Figura 9. Confronto curve taglio spostamento colonna R-1

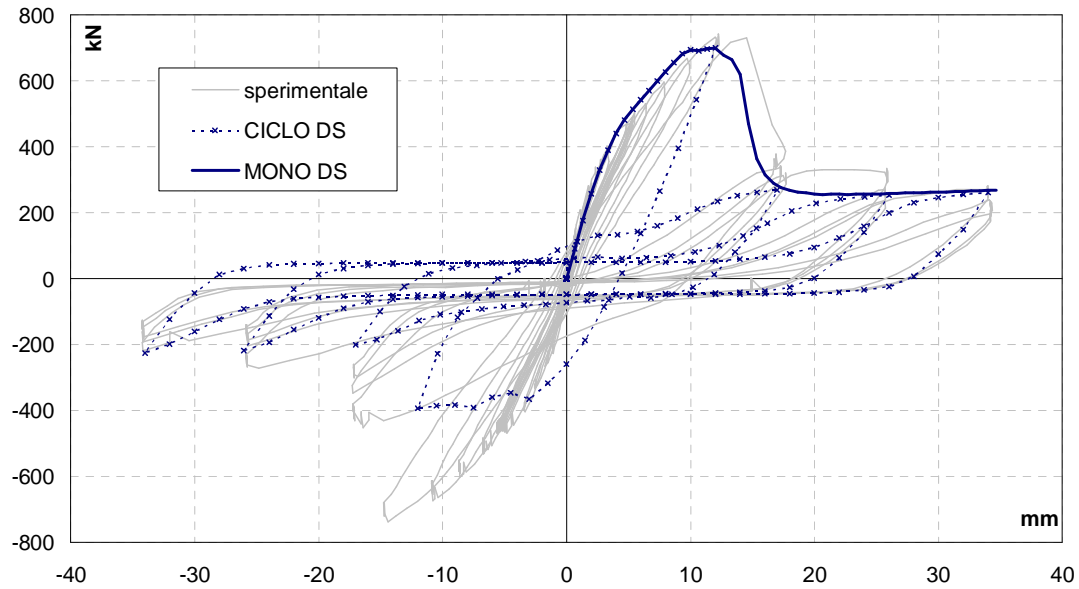


Figura 10. Confronto curve taglio spostamento colonna R-5

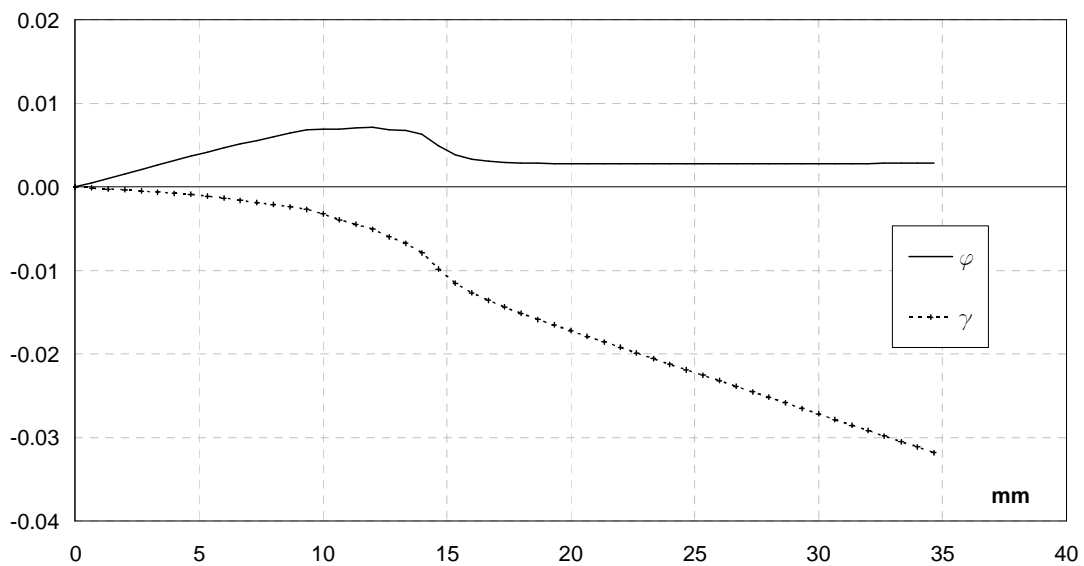


Figura 11. Deformate della sezione (curvatura e deformazione di taglio) di base colonna R-5

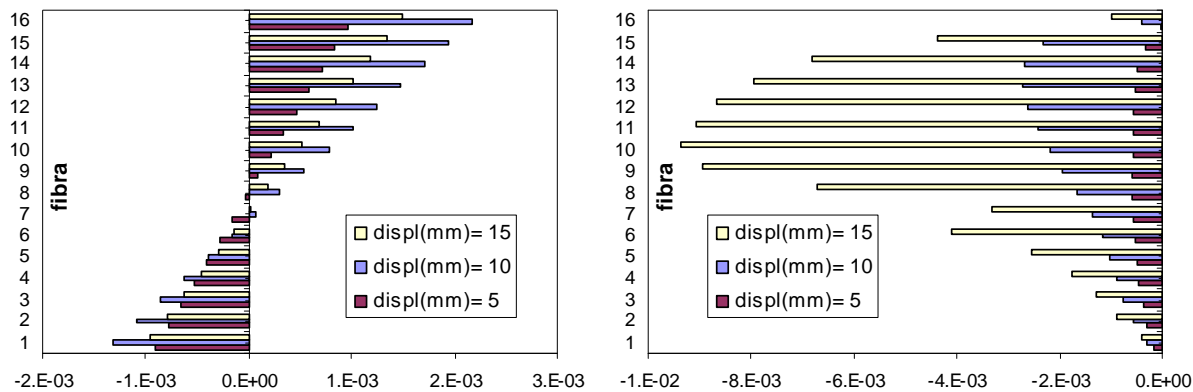


Figura 12. Deformazioni di fibra assiali e tangenziali ($\epsilon_{xx} - \epsilon_{xy}$) sulla sezione di base colonna R-5

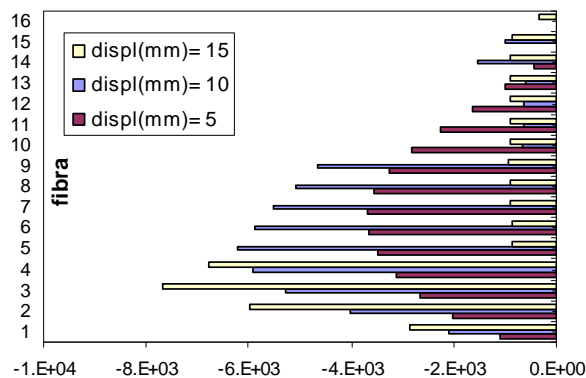


Figura 13. Tensioni tangenziali di fibra (τ_{xy}) sulla sezione di base colonna R-5

La colonna R-5 evidenzia, invece, una risposta sperimentale caratterizzata da una decisa rottura fragile per taglio. L'analisi monotona (fig. 10) rappresenta tale situazione in maniera molto efficace. Si nota, infatti, successivamente allo spostamento al picco di resistenza (12 mm circa), che il modello offre una improvvisa caduta di resistenza, con un leggero anticipo rispetto a quella sperimentale. Il taglio massimo sviluppato risulta leggermente inferiore a quello reale, (742 kN contro 700 kN). Mentre la resistenza residua della colonna viene perfettamente individuata.

Anche le simulazioni cicliche (fig. 10) risultano realistiche, la risposta del modello presenta la perdita di resistenza e rigidità nella fase di ricarica per raggiungere il primo spostamento imposto di segno opposto (-12 mm), mentre nella fase di carico del secondo ciclo di spostamento (17 mm), l'elemento si attesta sulla resistenza residua, determinata dal confinamento operato dalle staffe sulle fibre di calcestruzzo. Sperimentalmente il test mostra che la crisi avviene durante il primo tentativo di raggiungere lo spostamento superiore di 17mm (e precisamente allo spostamento di 14.5mm). Tuttavia tali minime differenze risultano ampiamente accettabili.

Nel grafico di figura 11 viene riportato l'andamento delle deformazioni generalizzate della sezione di base (curvatura e deformazione di

taglio), relativamente all'analisi monotona. È ben evidente come il modello individui la criticità per taglio, infatti successivamente al raggiungimento del picco di resistenza la curvatura di sezione cessa di crescere (anzi presenta una locale fase di decrescita) e poi rimane costante a dispetto di un progressivo aumento della deformata di taglio (maggiormente consistente nella fase di immediato post-picco). Ciò è coerente con l'apertura di una fessura per taglio che catalizza completamente le deformazioni successive della trave.

Infine nella figura 12, viene riportata l'evoluzione delle distribuzioni sulla sezione (relative all'analisi monotona) delle deformazioni di fibra normali e tangenziali e della tensione tangenziale. Si richiama all'attenzione come si modifichi la distribuzione delle deformazioni taglianti: l'approccio statico, che caratterizza questo elemento di trave con taglio, determina che la richiesta di deformazione di fibra vada a concentrarsi sulla parte tesa della sezione. Questo fatto è causato dalla presenza delle armature, le quali rappresentano il veicolo di scambio delle componenti assiali tra le due sezioni su cui è valutato l'equilibrio (*Dual Section*), che genera i termini di correzioni delle distribuzioni deformative di taglio, cfr. eqq.(23,24). In figura 13, viene infine riportata la distribuzione delle tensioni tangenziali sulla medesima sezione. Emerge come la fibre

che maggiormente contribuiscono alla resistenza taglio della sezione siano quelle ubicate in zona compressa, coerentemente con la meccanica reale del fenomeno.

4 CONCLUSIONI

L'elemento finito illustrato si dimostra capace di rappresentare con estrema efficacia i meccanismi di crisi per taglio di elementi mono-dimensionali in cemento armato, individuando con buona precisione sia i valori di picco della resistenza sia le deformazioni di rottura, che le resistenze residue post-picco. Il modello di trave si rivela valido anche nelle situazioni in cui i meccanismi fragili sono secondari rispetto a quelli flessionali, proponendosi, quindi, come uno strumento affidabile per la simulazione a tutto campo della risposta di elementi in cemento armato presso-inflessi.

Tale elemento rappresenta un'evoluzione dell'analoga trave di Petrangeli et al. (1999), da cui trae spunto e con cui condivide le principali caratteristiche. Tuttavia, se ne differenzia per l'impostazione statica data al problema dell'individuazione della distribuzione delle deformazioni di taglio di fibra (*Dual Section*), che nel già citato modello è, al contrario, di tipo cinematico. Tale diverso approccio, risulta dal punto di vista teorico più corretto, in quanto vengono garantite sia le condizioni di congruenza che di equilibrio tra il livello sezionale e quello interno di fibra. D'altro canto, questa nuova impostazione determina un appesantimento computazionale dell'algoritmo, introducendo un ulteriore ciclo iterativo, a livello di sezione. Tuttavia tale svantaggio risulta trascurabile sia per l'efficacia e la robustezza dell'algoritmo di elemento sia per i forti progressi che sono stati ottenuti in termini di potenza e velocità degli elaboratori elettronici di ultima generazione.

Appare infine doveroso rimarcare come buona parte dell'efficacia di questo modello di trave con taglio, e del suo predecessore, sia legata alla validità del legame costitutivo del calcestruzzo utilizzato (*modello microplane*), il quale riesce a rappresentare in maniera realistica la risposta del calcestruzzo nelle diverse situazioni (stati deformativi) di principale interesse nell'ambito degli elementi mono-dimensionali trave-colonna.

REFERENCES

- Bažant, Z.P., Prat, P.C., 1988. Microplane model for brittle plastic material. I: Theory", *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**(10), 1672-1688.
- Ceresa P., Pertini L., Pinho R., 2007. Flexure-shear fiber Beam-column element for modelling frame structures under seismic loading - State of Art. *J. of Earthquake Engineering* **11**, 46-88.
- Ceresa P., Petrini L., Pinho R., R. Sousa., 2009. A fibre flexure-shear model for seismic analysis of RC-framed structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **38**(5), 537-586.
- Gregori J.N., Sosa P.M., Prada M.A.F., Filippou F.C., 2007. 3D frame element for the analysis of reinforced and prestressed concrete structures subjected to shear and torsion loads. *Engineering Structures*, **29**(12), 3404-3419.
- Guedes, J., Pegon, P., Pinto, A. V., 1994. A Fibre/Timoshenko Beam Element in CASTEM2000. *Special Publication Nr. I.94.31 Applied Mechanics Unit*, Safety Technology Institute, Commission of the European Communities, Joint Research Centre, Ispra Establishment, Italy.
- Guedes, J., Pinto, A., 1997. A numerical model for shear dominated bridge piers. *Proc. of the second Italian-Japan Workshop on seismic design and retrofit of bridges*, Roma
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N., Park, R. 1988, Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**(8), 1804-1826.
- Petrangeli M., Ciampi V., 1997, Equilibrium based iterative solutions for the nonlinear beam problem. *International J. of Numerical Methods in Engineering*, **40**, 423-437.
- Petrangeli, M., Pinto, P.E., Ciampi, V., 1999. Fibre element for cyclic bending and shear of RC structures. I: Theory. *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, **125**(9), 994-1001.
- Petrangeli, M., 1999, "Fibre element for cyclic bending and shear of RC structures. II: Verification. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **125**(9), 1002-1009.
- Ranzo, G., Petrangeli, M., 1998. A fibre finite beam element with section shear modeling for seismic analysis of RC structures. *J. of Earthquake Engineering*, **2**(3), 443-473.
- Ranzo, G., 2000. Experimental and Numerical Studies on the Seismic Performance of Beam-Column RC Structural Members Subject to High Shear. *PhD Dissertation*, Facoltà di Ingegneria, Università "La Sapienza", Roma.
- Spacone, E., Ciampi, V., Filippou, F.C., 1996. Mixed formulation of nonlinear beam finite element. *Computers & Structures*, **58**(1), 71-83.
- Tortolini, P., Petrangeli, M., Spacone, E., 2009. Un modello microplane modificato per la risposta del calcestruzzo nel piano. *Atti XIII Congresso ANIDIS*, Bologna, 28 giugno - 2 Luglio
- Tortolini, P., 2011. L'elemento di trave non lineare con interazione M-N-V. *PhD Dissertation*, Facoltà di Architettura, Università "G.D'Annunzio" Chieti-Pescara.
- Vecchio, F.J., Collins, M.P., 1988. Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using Modified Compression Field Theory. *ACI Structural Journal*, **85**, 258-268.
- Xiao Y., 1993. Steel jacket retrofit for enhancing shear strength of short rectangular reinforced concrete columns. *Report No. SSRP-92/07*, University of California, San Diego.