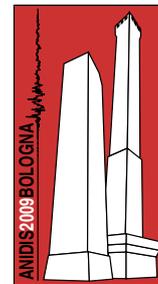


# Un modello microplane modificato per la risposta del calcestruzzo nel piano

Paolo Tortolini, Marco Petrangeli, Enrico Spacone

PRICOS – Facoltà di Architettura di Pescara, Università “G. D’Annunzio” Chieti - Pescara



*Keywords: legame costitutivo non lineare calcestruzzo, microplane, resistenza a trazione, compressione e taglio.*

## ABSTRACT

L'articolo affronta la problematica della modellazione numerica del comportamento bidimensionale del calcestruzzo in campo ciclico non lineare. Lo stato tensionale viene risolto facendo uso di un modello microplane modificato. Tutti i modelli microplane si caratterizzano per il fatto di lavorare con un approccio cinematico su due scale distinte: una macroscale ed una microscale. Il tensore delle tensioni ( $\sigma_x$ ;  $\sigma_y$ ;  $\tau_{xy}$ ) viene ottenuto tramite integrazione delle risposte tensionali dei livelli micro, i cosiddetti micropiani, in base al PLV.

Il modello presentato si differenzia da quelli classici per alcune assunzioni che lo rendono allo stesso tempo semplice ed efficace: si fa uso di 8 micropiani; si monitorano solo le componenti normali alla giacitura del micropiano; si introduce una funzione di danno che partiziona il macro tensore delle deformazioni ( $\epsilon_x$ ;  $\epsilon_y$ ;  $\epsilon_{xy}$ ) in due componenti, weak e strong.

L'ultima assunzione determina l'efficacia del modello, riuscendo a superare i principali problemi dei modelli microplane classici, legati alla forte asimmetria di risposta del calcestruzzo a compressione e trazione.

## 1 INTRODUZIONE

Il comportamento del calcestruzzo è stato ed è tuttora argomento molto studiato. Data la non omogeneità del materiale, composto da pasta di cemento ed inerti, il calcestruzzo presenta un comportamento non lineare già per bassi livelli di sollecitazione. Tale non linearità è causata dalle microfessurazioni interne che si generano in conseguenza di concentrazioni di tensione all'interfaccia dei due componenti del materiale, a causa della fortissima differenza di consistenza (rigidezza) degli stessi. Pertanto già in principio delle prime applicazioni strutturali del cemento armato è apparso evidente come l'assunzione di un comportamento lineare fosse del tutto insoddisfacente. La ricerca di leggi non lineari è stata fiorente particolarmente nel corso degli anni '70 e '80. Si ricordano le formulazioni che hanno riscosso maggiore successo, quella di Kent e Park (1971) e quella successivamente modificata dallo stesso Park et al. (1982). Tali formulazioni, basate su numerose evidenze sperimentali,

tengono conto di alcuni fattori che modificano la risposta del materiale (su tutti l'effetto del confinamento trasversale sulla resistenza a compressione).

Tuttavia la maggior parte delle formulazioni presenti in letteratura sono relative alla risposta uni-assiale (compressione/trazione). Per poter trattare il comportamento biassiale del calcestruzzo bisogna allora considerare dei modelli che operino su un tensore completo nel piano. L'approccio che più si presta a questo scopo, in campo non lineare, è quello seguito dai modelli definiti *microplane*. Tali modelli, nati originariamente per lo studio di materiali omogenei, come l'acciaio (Taylor, 1938), sono stati presto indirizzati nel campo dei materiali fragili ed eterogenei come il calcestruzzo (Bažant and Prat, 1988a,b). Sono caratterizzati dal fatto che, per ottenere la risposta del materiale, distinguono due livelli di attività: uno macroscopico ed uno microscopico, definendone la correlazione.

Esistono tuttavia altri tipi di approcci al problema piano del calcestruzzo ed in particolare del cemento armato, come quello definita da

(Vecchio and Collins, 1986) e (Palermo and Vecchio, 2003), dove il problema della rottura è trattato in termini di valori medi e di invarianti delle deformazioni e tensioni.

## 2 I MODELLI MICROPLANE CLASSICI

L'idea alla base dei modelli *microplane* è quella di rappresentare il comportamento di un materiale (nel piano o nello spazio) attraverso l'uso di un insieme di superfici (i micropiani), sulle quali sono definite delle leggi costitutive del tipo  $\sigma$ - $\varepsilon$ . Il comportamento globale (macroscopico) è ottenuto a partire dai contributi dei singoli micropiani. Si parla perciò di risposta integrale. Comunemente i modelli sono basati su vincoli cinematici, i quali permettono di definire le deformazioni di micropiano ( $\bar{e}_k$ ) a partire dal vettore di deformazioni macroscopico ( $\bar{\varepsilon}$ ) attraverso relazione geometriche. È possibile infatti definire l'operatore  $A_k$ , funzione dell'orientazione del micropiano, per cui:

$$\bar{e}_k = A_k^T \bar{\varepsilon} \quad (1)$$

Il tensore delle tensioni si ottiene grazie all'applicazione del principio dei lavori virtuali (PLV), attraverso cui il lavoro svolto dal tensore macroscopico per il proprio campo di deformazioni è uguagliato a quello svolto dalle tensioni di micropiano per le corrispondenti deformazioni:

$$\int_s (d\bar{s} \cdot \delta\bar{e}) \cdot dS = \frac{4\pi}{3} d\bar{\sigma} \cdot \delta\bar{\varepsilon} \quad 3D \quad (2a)$$

$$\int_c (d\bar{s} \cdot \delta\bar{e}) \cdot dC = 2\pi \cdot d\bar{\sigma} \cdot \delta\bar{\varepsilon} \quad 2D \quad (2a)$$

dove i termini a destra delle (2a-b) sono riferiti alla microscala mentre quelli a sinistra alla macroscala. L'uguaglianza espressa nelle (2a-b) è solo approssimata a causa dell'imposizione cinematica determinata dalla (1).

Riscrivendo la (1) in forma incrementale si ha:

$$\delta\bar{e}_k = A_k^T \delta\bar{\varepsilon} \quad (3)$$

Pertanto, sostituendo la (3) in (2a-b) e considerando l'invarianza di  $\delta\bar{\varepsilon}$ , risulta:

$$d\bar{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_s A_k^T d\bar{s}_k \cdot dS \quad (4a)$$

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_c A_k^T d\bar{s}_k \cdot dC \quad (4b)$$

Quindi risulta noto il tensore delle tensioni una volta definite delle relazioni (leggi costitutive) tra il vettore delle tensioni di micropiano e le corrispondenti deformazioni:

$$\bar{s}_k = s(\bar{e}_k) \quad (5)$$

Il modello inizialmente proposto da Bažant (Bažant and Prat, 1988a,b) (Bažant et al. 1996a,b) (Bažant et al. 2000) utilizzava una partizione del tensore delle deformazioni nelle componenti volumetriche e deviatoriche. Sul micropiano si utilizzavano legami costitutivi separati per le componenti normali e tangenziali. L'integrazione veniva quindi effettuata monitorando la risposta su micropiani opportunamente orientati sulla superficie di una sfera.

## 3 IL MODELLO MICROPLANE MODIFICATO

Il modello presentato in questo lavoro si propone di ottenere una simulazione attendibile del comportamento piano del calcestruzzo. Le ipotesi di base sono le seguenti:

- i. Stato di tensione piano.
- ii. Uso di otto micropiani distribuiti uniformemente su una circonferenza.
- iii. Monitoraggio della sola componente normale al micropiano con utilizzo una stessa legge  $\sigma$ - $\varepsilon$  per tutte le giaciture.
- iv. Introduzione di una funzione che separa le macrodeformazioni in due componenti (weak e strong).

Il numero di micropiani assunto risulta un buon compromesso tra accuratezza della soluzione e necessità di mantenere il processo di calcolo spedito.

L'ipotesi di considerare solo le componenti normali dei micropiani scaturisce dall'idea di poter ricondurre ogni comportamento del calcestruzzo esclusivamente a risposte assiali di compressione/trazione.

L'ultima ipotesi, infine, rappresenta il punto fondamentale di tutto il modello presentato, determinandone la validità e l'efficacia, come verrà approfondito nel proseguo del lavoro.

Prima di entrare nei dettagli del modello si cercherà di chiarire definitivamente il funzionamento di base dell'approccio microplane piano, (sotto tutte le ipotesi descritte sopra eccetto che la iv).

Dato uno stato deformativo macroscopico,  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{xy})$ , vengono ricavate le deformazioni normali di micropiano mediante la (1), che nel caso piano hanno la seguente forma esplicita:

$$\bar{e}_{m1} = (\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 0^\circ \\ \sin^2 0^\circ \\ \sin 0^\circ \cos 0^\circ \end{pmatrix} = (\varepsilon_{xx}) \quad (6a)$$

$$\bar{e}_{m2} = (\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 45^\circ \\ \sin^2 45^\circ \\ \sin 45^\circ \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \quad (6b)$$

$$= (0.5\varepsilon_{xx} + 0.5\varepsilon_{yy} + 0.5\varepsilon_{xy})$$

$$\bar{e}_{m3} = (\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 90^\circ \\ \sin^2 90^\circ \\ \sin 90^\circ \cos 90^\circ \end{pmatrix} = (\varepsilon_{yy}) \quad (6c)$$

$$\bar{e}_{m4} = (\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 135^\circ \\ \sin^2 135^\circ \\ \sin 135^\circ \cos 135^\circ \end{pmatrix} = \quad (6d)$$

$$= (0.5\varepsilon_{xx} + 0.5\varepsilon_{yy} - 0.5\varepsilon_{xy})$$

Le tensioni di micropiano si ottengono applicando la legge costitutiva (5). Da queste è possibile calcolare i contributi al tensore macroscopico  $\bar{\sigma}$  dei singoli micropiani,  $A_k^T s_k$ :

$$\bar{\sigma}_{m1} = (\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \tau_{xy})_{m1} = \quad (7a)$$

$$= (\cos^2 0^\circ; \sin^2 0^\circ; \sin 0^\circ \cos 0^\circ) \cdot s(e_{m1}) =$$

$$= (1; 0; 0) \cdot s_{m1}$$

$$\bar{\sigma}_{m2} = (\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \tau_{xy})_{m2} = \quad (7b)$$

$$= (\cos^2 45^\circ; \sin^2 45^\circ; \sin 45^\circ \cos 45^\circ) \cdot s(e_{m2}) =$$

$$= (0.5; 0.5; 0.5) \cdot s_{m2}$$

$$\bar{\sigma}_{m3} = (\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \tau_{xy})_{m3} = \quad (7c)$$

$$= (\cos^2 90^\circ; \sin^2 90^\circ; \sin 90^\circ \cos 90^\circ) \cdot s(e_{m3}) =$$

$$= (0; 1; 0) \cdot s_{m3}$$

$$\bar{\sigma}_{m4} = (\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \tau_{xy})_{m4} = \quad (7d)$$

$$= (\cos^2 135^\circ; \sin^2 135^\circ; \sin 135^\circ \cos 135^\circ) \cdot s(e_4) =$$

$$= (0.5; 0.5; -0.5) \cdot s_{m4}$$

Quindi tali contributi vengono integrati, attraverso la (4b), in modo da fornire il tensore macroscopico  $\bar{\sigma} = (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy})$ . Si precisa che l'integrazione su un numero di piani finiti viene reso equivalente all'integrazione sulla circonferenza attraverso una costante di integrazione C, dipendente dal numero di piani utilizzato:

$$\bar{\sigma} = \int_0^{2\pi} A_k^T s_k d\vartheta \cong 2C \sum_{i=1}^4 \bar{\sigma}_{mi} \quad (8)$$

L'impossibilità di utilizzare la procedura come appena esposta, in presenza di un materiale come il calcestruzzo, è evidente eseguendo il seguente semplice test a compressione. Per semplicità si fa uso ora di un legge di micropiano rappresentata da una bilineare: il primo ramo caratterizzato da un modulo di rigidezza  $E_1$  e il secondo da  $E_2$ . I valori nell'esempio sono riportati in Tabella 1.

Il raggiungimento della massima compressione normale,  $\sigma_{xx} = -37.5 \text{ MPa}$ , comporterebbe una deformazione di compressione pari a  $\varepsilon_{xx} = -0.35\%$  ed una laterale di trazione almeno pari a  $\varepsilon_{yy} = 0.07\%$  (determinata dall'effetto Poisson elastico). In base alla (6a) e (6c) si ha che la deformazione normale risulta associata interamente al micropiano 1 ( $k=0^\circ$ ), mentre quella laterale al micropiano 3 ( $k=90^\circ$ ). Quindi secondo la semplice legge costitutiva di micropiano adottata si dovrebbe avere nella giacitura a  $90^\circ$  una tensione di trazione pari a  $17.5 \text{ MPa}$ , superiore alla resistenza di trazione del materiale.

Tabella 1. Parametri della legge bilineare del calcestruzzo

$E_1$	25 000 MPa
$E_2$	5 000 MPa
$\nu$	0.20
$\sigma_{c1}$	-25.0 MPa
$\sigma_{c2}$	-37.5 MPa
$\sigma_{ct}$	2.5 MPa

Pertanto il modello così formulato, anche facendo uso di leggi di micropiano più elaborate, non è in grado di riprodurre il comportamento di un materiale come il calcestruzzo caratterizzato da una risposta a compressione ed a trazione fortemente asimmetrica. Di conseguenza è stato modificato partizionando il tensore della deformazione macroscopiche  $\bar{\varepsilon}$ , associando ad una componente un comportamento lineare ed all'altra uno non lineare (*weak and strong splitting*). Tale operazione trova fondamento se si considera il fatto che il calcestruzzo è un materiale eterogeneo, composto sostanzialmente da due elementi con caratteristiche molto differenti tra loro: l'aggregato grosso, costituente la parte forte e la pasta di cemento e sabbia, che rappresenta la parte più debole. È dunque ragionevole ritenere che il contributo alla resistenza dell'aggregato sia di tipo elastico lineare, mentre la parte debole abbia una risposta prettamente non lineare.

La scomposizione del tensore di deformazione avviene grazie alla definizione di una funzione legata al degrado del materiale,  $\Phi$  (di cui si tratterà più avanti), secondo le seguenti espressioni:

$$\bar{\varepsilon}^{strong} = \Phi \bar{\varepsilon} \quad (9a)$$

$$\bar{\varepsilon}^{weak} = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{strong} \quad (9b)$$

Risulta vantaggioso operare tale scomposizione sulle deformazioni principali. La deformazione di trazione *strong* è ottenuta sulla base dell'effetto Poisson a partire dalla deformazione di compressione. In altre parole la funzione che opera la partizione contiene dentro di sé il coefficiente di Poisson, come meglio chiarito nel seguito:

$$\varepsilon_{max}^{strong} = \Phi \varepsilon_{min} \quad (10a)$$

$$\varepsilon_{max}^{weak} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{max}^{strong} \quad (10b)$$

$$\varepsilon_{min}^{strong} = 0 \quad (10c)$$

$$\varepsilon_{min}^{weak} = \varepsilon_{min} \quad (10d)$$

La (10c) e (10d) dichiarano come la diversità di comportamento tra i due componenti del calcestruzzo è considerata unicamente nella risposta a trazione del materiale.

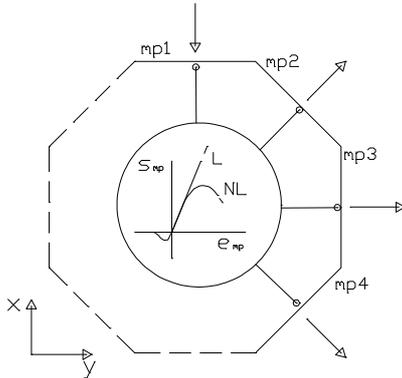


Figura 1. Il modello microplane modificato

Le due componenti di deformazioni macroscopiche ottenute attraverso le (10), possono essere trasportate sui micropiani attraverso l'imposizione cinematica (1), e quindi le (6), avendole preventivamente esplicitate ancora secondo il riferimento globale (x,y). Dunque, in base a quanto sopra affermato circa lo *splitting*, a livello di micropiano sono definite due tipi di leggi costitutive una lineare per la componente *strong* ed una non lineare per la componente *weak* (Figura 1). Per la legge non lineare è stato assunto il legame proposto in (Mander et al. 1988). È possibile quindi ottenere le tensioni di micropiano attraverso la (5), che assume la seguente forma:

$$s_{mi}^{strong} = E \cdot e_{mi}^{strong} \quad (11a)$$

$$s_{mi}^{weak} = f(e_{mi}^{weak}) \quad (11b)$$

Infine le due componenti vengono integrate attraverso una sommatoria per fornire il tensore delle macrotensioni, secondo la (8), la quale assume la seguente espressione:

$$\bar{\sigma} = 2C^{strong} \sum_{i=1}^4 s_{mi}^{strong} + 2C^{weak} \sum_{i=1}^4 s_{mi}^{weak} \quad (12)$$

dove  $C^{strong}$  e  $C^{weak}$  sono costanti d'integrazione dipendenti dal numero di micropiani utilizzato e dai parametri elastici del materiale (Pertangeli et al., 1999). Nella Figura 2 è rappresentato il diagramma di flusso del modello presentato.

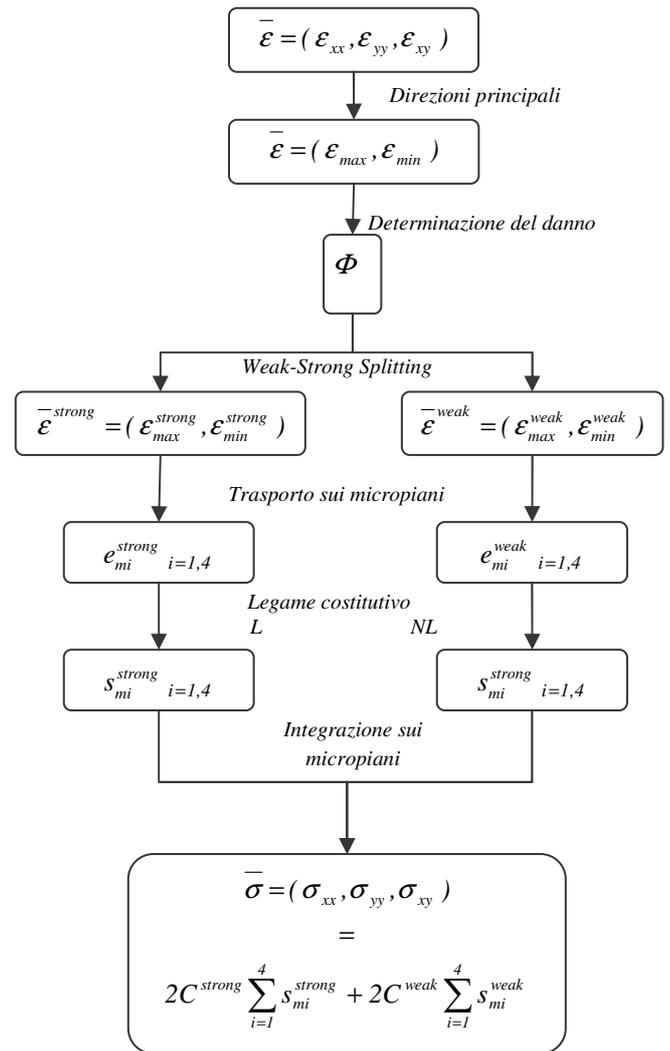


Figura 2. Diagramma di flusso del modello microplane modificato

### 3.1 La funzione di splitting

La funzione  $\Phi$ , che determina la scomposizione (*splitting*) del tensore delle deformazioni nelle componenti *weak* e *strong*, è definita come segue:

$$\Phi = -\phi_0(1-\phi_t) \cdot (1-\phi_c) \quad (13)$$

dove  $\phi_0$  è un parametro multiplo del coefficiente di Poisson del materiale elastico ( $\nu$ ), mentre  $\varphi_t$  e  $\varphi_c$  sono parametri di degrado, rispettivamente legati alla trazione ed alla compressione, il cui valore è compreso tra 0 e 1. Il valore nullo rappresenta l'assenza di danneggiamento.

Si è ritenuto corretto valutare i parametri di danno sulla base degli invarianti dello stato deformativo, facilmente individuabili attraverso la rappresentazione sul piano di Mohr ( $\varepsilon_{max}$ ,  $\varepsilon_{min}$ ).

#### Parametro $\varphi_t$

Questo parametro è funzione della componente volumetrica dello stato di deformazione. Entra in gioco nel caso in cui il punto rappresentante il centro del cerchio di Mohr è positivo, indice di uno stato deformativo prevalentemente di trazione. La formulazione è la seguente:

$$\varphi_t = \left( \frac{\left( \frac{\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}}{2} \right)^z}{k\varepsilon_{ct}} \right), \quad 0 \leq \left( \frac{\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}}{2} \right) < k\varepsilon_{ct}$$

$$\varphi_t = 0, \quad \left( \frac{\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}}{2} \right) \geq k\varepsilon_{ct} \quad (14)$$

dove l'esponente  $z$  determina la pendenza iniziale della curva,  $(\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min})/2$  è il centro del cerchio,  $k\varepsilon_{ct}$  è un valore di riferimento, multiplo della deformazione al picco di trazione determinato in base alla legge non lineare di micropiano. Quando il centro si trova oltre tale valore il parametro è nullo, indicando che è stato raggiunto il massimo danneggiamento del materiale.

In Figura 3 viene riportato l'andamento tipico di  $(1-\varphi_t)$  ed il corrispondente splitting della deformazione principale di trazione, avendo ipotizzato forzatamente che  $\varepsilon_{min}$  sia fisso e  $\varepsilon_{max}$  crescente.

#### Parametro $\varphi_c$

Il parametro è funzione della componente deviatorica dello stato di deformazione, secondo la seguente espressione:

$$\varphi_c = 1 - e^{-\left[ \frac{\varepsilon_{min}(\varepsilon_{min} - \varepsilon_{max})}{c\varepsilon_{cc}^2} \right]^y} \quad (15)$$

dove  $y$  regola la pendenza della funzione esponenziale ed  $c$  è un coefficiente moltiplicatore della deformazione al picco di compressione della legge non lineare di micropiano,  $\varepsilon_{cc}$ .

Si tiene a precisare, che nel modello proposto il parametro di splitting derivante dallo stato di trazione ( $\varphi_t$ ) è stato considerato come un effetto istantaneo di cui il materiale non tiene memoria,

contrariamente a quello legato alla compressione. Infatti una possibile rottura a trazione può essere considerata come un fenomeno circoscritto e strettamente relazionato all'orientazione delle fessurazione. In altre parole, secondo la giacitura delle fessure, il materiale non è in grado di opporre alcuna resistenza a trazione, mentre tuttavia è capace di resistere a compressione. D'altro canto si può ritenere che i fenomeni fessurativi abbiano poca influenza sulla risposta del materiale per carichi di trazione/compressione altrimenti orientati. Diversamente accade in presenza di una rottura per compressione / schiacciamento, la quale determina una perdita delle caratteristiche resistenti molto più diffusa ed estesa, determinando un'impossibilità del materiale di rispondere al carico qualunque sia la direzione e verso di applicazione dello stesso.

Nell'algorithmo quindi il parametro  $\varphi_t$  viene aggiornato ad ogni passo di carico, mentre  $\varphi_c$  viene aggiornato solo se superiore a quello raggiunto nei precedenti passi di carico.

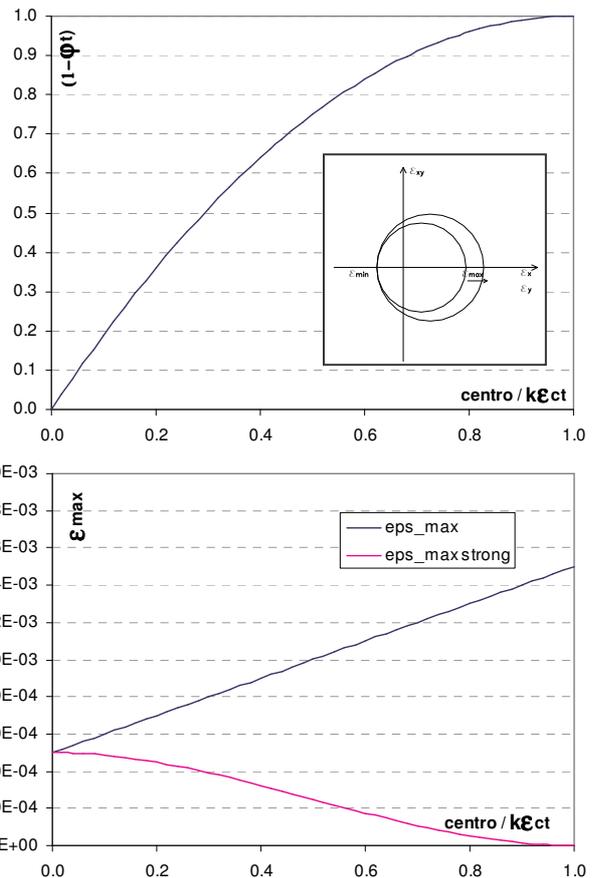


Figura 3. Andamento della funzione di splitting di trazione e corrispondente scomposizione della deformazione

In ultimo si pone l'attenzione sul termine  $\phi_0$  della (13). I migliori risultati sono stati ottenuti ponendo il parametro di poco superiore al coefficiente di Poisson ( $\phi_0 = 1.2\nu$ ). Questa assunzione fa sì che nella direzione principale di trazione si possono ottenere contributi opposti

delle due componenti, come risulta evidente dalla Figura 4, dove nella parte iniziale si nota che la componente *strong* è superiore alla deformazione totale di trazione, di conseguenza risulta che la componente *weak* ha segno opposto (compressione), dovendo sempre rispettare la (9b). Questo fenomeno trova una giustificazione fisica se si considera l'analogia del calcestruzzo con la muratura (Figura 5). Entrambi i sistemi sono composti da due elementi di caratteristiche fisico-meccaniche fortemente differenti: la malta e la pasta di cemento, rappresentano la parte *weak*, il mattone e gli inerti invece rappresentano la parte *strong*. Tests strumentati di schiacciamento di muretti di mattoni hanno messo in luce come i letti di malta sono compressi in direzione laterale a causa del confinamento operato dai mattoni che d'altra parte risultano tesi per effetto Poisson.

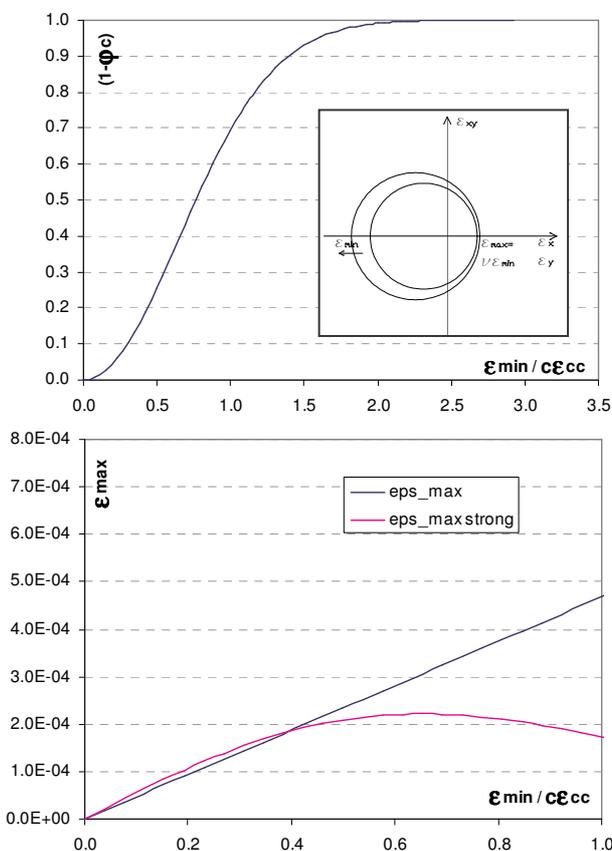


Figura 4. Andamento della funzione di splitting di compressione e scomposizione della deformazione

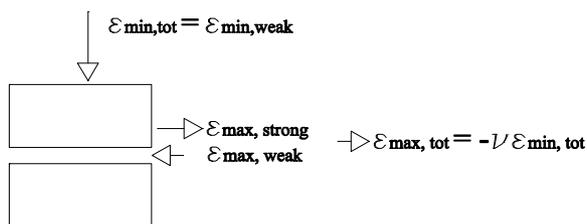


Figura 5. Analogia con la muratura per i contributi opposti dei due componenti.

#### 4 TESTS NUMERICI

La prima tipologia di simulazione numerica affrontata, riguarda la prova a compressione. In primo luogo viene trattata una compressione semplice. I dati di input del modello sono la storia di deformazioni assiale  $\epsilon_{xx}$  e la condizione al contorno di tensione laterale nulla ( $\sigma_{yy}$ ).

I parametri fondamentali del materiale utilizzato nel legame costitutivo di micropiano sono riportati in Tabella 2.

Tabella 2. Parametri del calcestruzzo

$E$	30 000 MPa
$\nu$	0.18
$\epsilon_{cc}$	-0.2%
$f_{cc}$	-35.0 MPa
$\epsilon_{ct}$	0.02%
$f_{ct}$	2.0 MPa

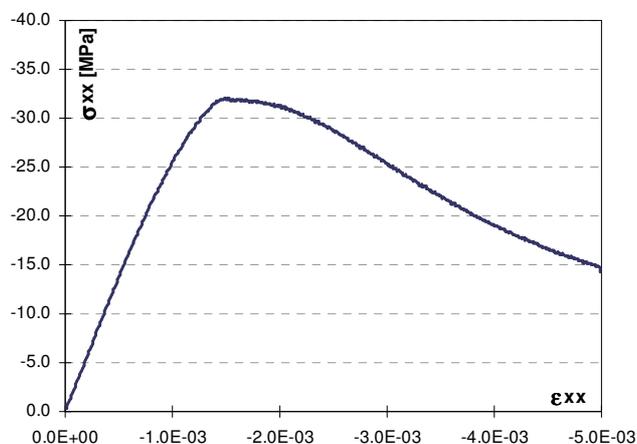


Figura 6. Simulazione di una prova a compressione semplice - risposta macroscopica

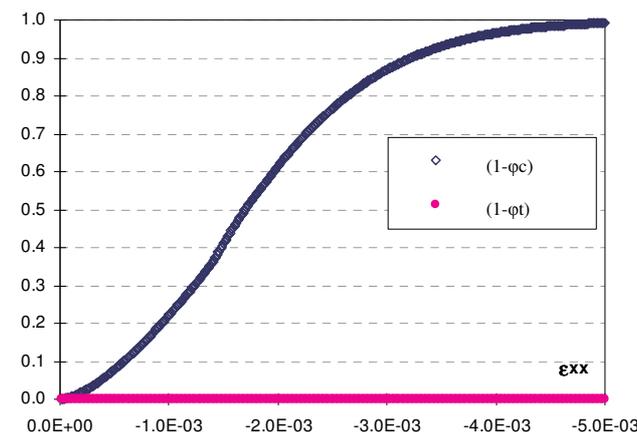


Figura 7. Andamento delle funzioni di splitting nella prova a compressione semplice

La risposta del modello in termini macroscopici è rappresentata in Figura 6. La Figura 7 descrive l'andamento della funzione di splitting al crescere della deformazione di compressione. Mentre le risposte dei micropiani sono mostrate in Figura 8. Infine viene evidenziata in Figura 9 la risposta biassiale del

materiale, riportando sull'asse delle ascisse le deformazioni secondo la direzione del carico (normale) e quella ortogonale (trasversale), mentre sull'asse delle ordinate è rappresentata la tensione di compressione. Strettamente collegato al precedente risulta il grafico di Figura 10, dove si mette in luce la variazione del coefficiente di Poisson al crescere del livello di compressione.

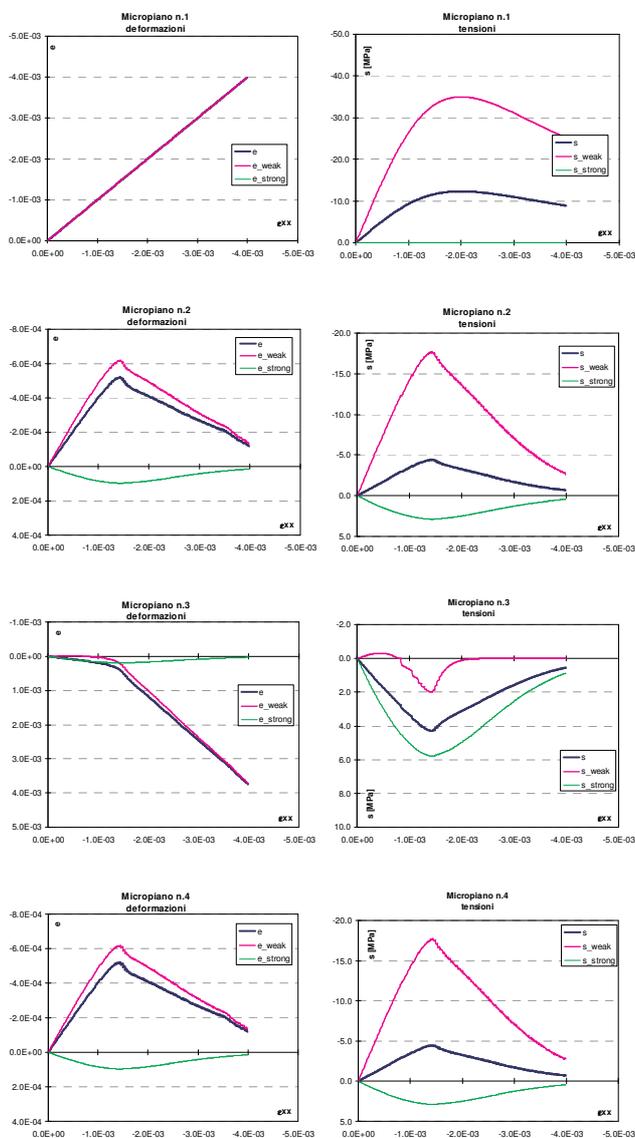


Figura 8. Simulazione di una prova a compressione semplice - risposta dei micropiani

A conclusione dei grafici presentati si vuole indirizzare l'attenzione su come la risposta (macroscopica) del modello risulta determinata dal comportamento a trazione del materiale. Si fa notare infatti come il tratto discendente della curva  $\sigma-\varepsilon$  (Figura 6) avvenga a seguito del raggiungimento della massima trazione della componente *weak* (che segue il legame non lineare) nel micropiano orientato a  $90^\circ$  rispetto alla direzione di compressione (micropiano 3, Figura 8).

Il modello dunque riproduce i più importanti aspetti del problema dello schiacciamento del

calcestruzzo. Infatti ponendo ancora l'attenzione sulle Figure 9 e 10 risulta evidente come l'effetto Poisson ottenuto rispecchi realisticamente il comportamento del materiale oggetto di studio. Inizialmente il coefficiente è pari al valore del calcestruzzo in campo elastico-lineare ( $\nu=0.18$ ), successivamente esso va crescendo in maniera sempre più rapida in fase di picco e post-picco (pertanto più correttamente si dovrebbe far riferimento ad un coefficiente di Poisson apparente), tendendo asintoticamente al valore unitario, tipico di un materiale completamente sfaldato (Van Mier, 1986).

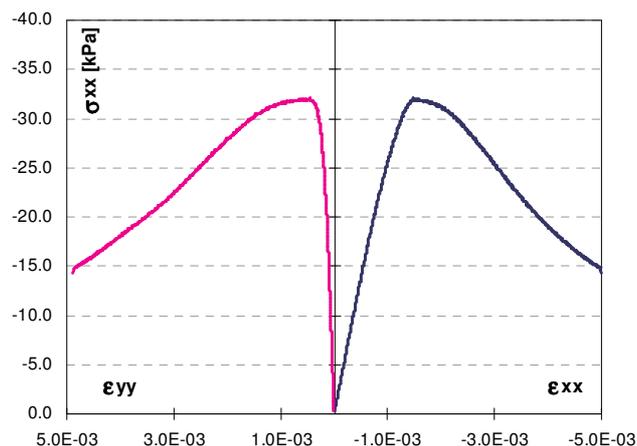


Figura 9. Risposta biassiale della prova a compressione semplice

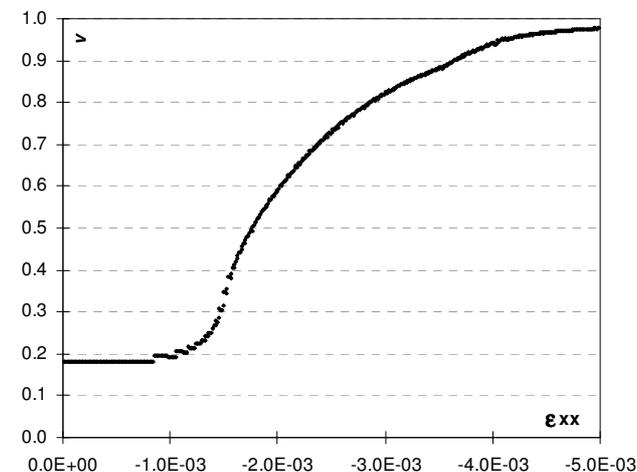


Figura 10. Andamento del modulo di Poisson apparente nella prova a compressione semplice

Il modello è in grado di affrontare più storie di deformazioni e pertanto di effettuare analisi cicliche, in Figura 11 è rappresentata la risposta macroscopica di una prova a compressione in tre cicli. Nel primo si raggiunge una deformazione assiale pari allo 0.2% e successivo scarico, nel secondo lo 0.3% e successivo scarico, nel terzo lo 0.5%.

Poiché il modello tiene conto di tutte le componenti del piano sia deformative che tensionali, è possibile considerare gli effetti del

confinamento sulla resistenza a compressione. Il confinamento viene assimilato ad uno stato tensionale trasversale imposto e costante durante la prova. La Figura 12 mostra i risultati di una prova a compressione variando la tensione di confinamento da cui è evidente come il modello sia perfettamente in sintonia con il fenomeno fisico reale. La resistenza di picco a compressione risulta crescere all'aumentare del confinamento, insieme alla deformazione ultima del calcestruzzo.

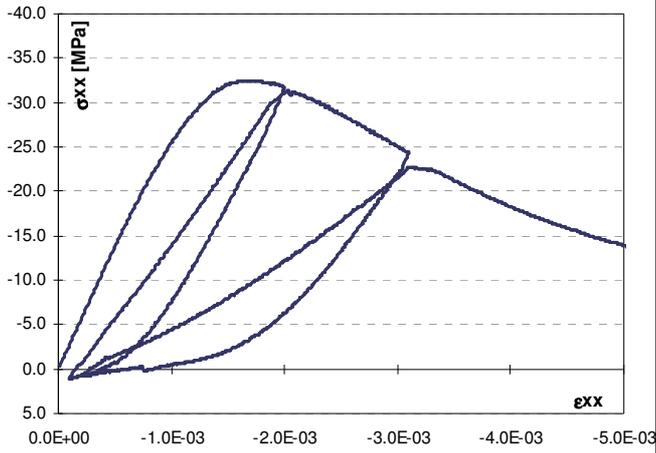


Figura 11. Prova a compressione ciclica

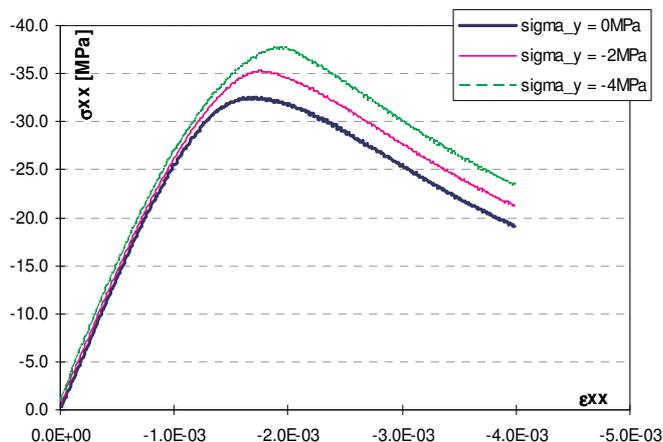


Figura 12. Prova a compressione confinata

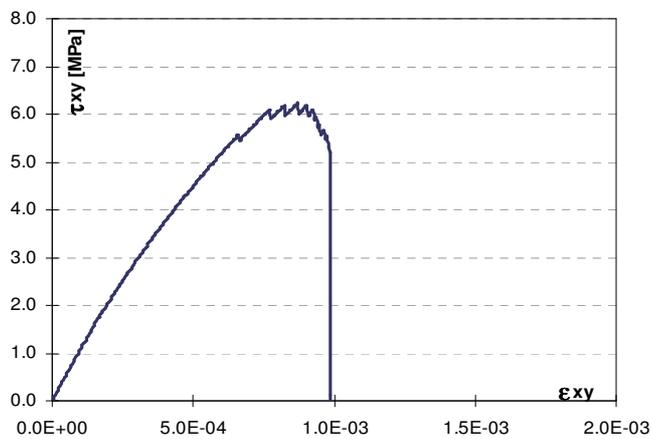


Figura 13. Simulazione di una prova a taglio puro, Risposta macroscopica

La seconda tipologia di tests numerici affronta il comportamento a taglio del calcestruzzo. Il primo caso studiato vuole simulare una prova di taglio puro. I dati di input sono la storia di deformazione  $\epsilon_{xy}$  e le condizioni al contorno  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ . I parametri di materiale che definiscono i legami di micropiano sono gli stessi utilizzati nelle prove precedenti.

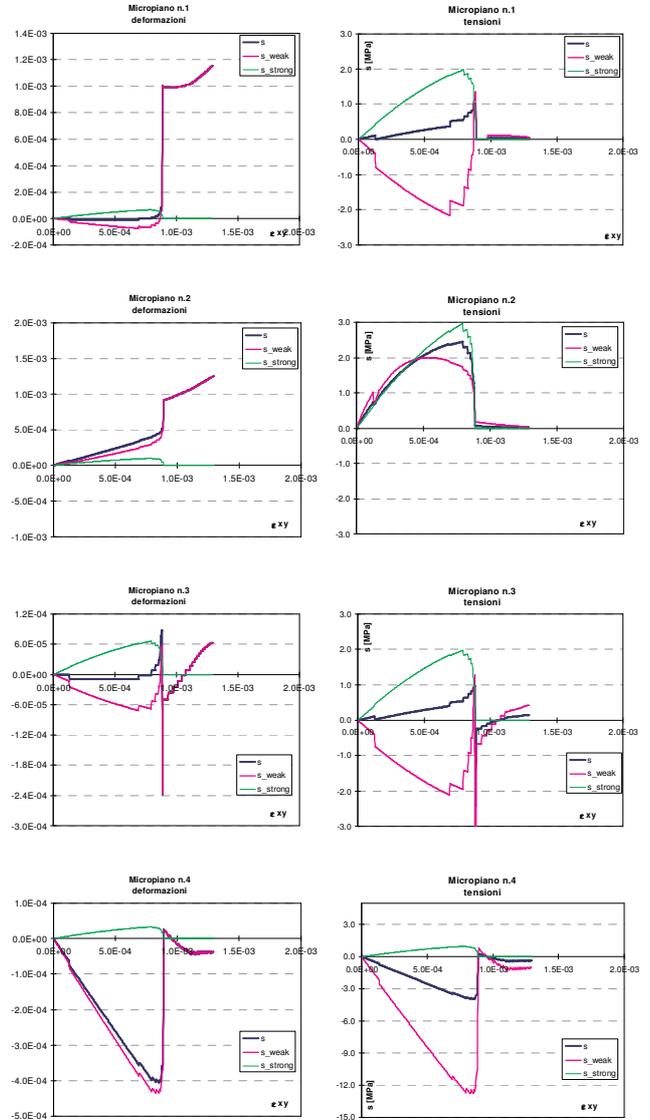


Figura 14. Simulazione di una prova a taglio puro, risposta sui micropiani

La Figura 13 riporta la risposta macroscopica, mentre in Figura 14 sono rappresentate le risposte di micropiano. Appare evidente come il meccanismo di collasso espresso dal modello sia di tipo fragile, con brusco decadimento delle capacità resistenti, in accordo al fenomeno reale. La rottura segue al raggiungimento della massima resistenza a trazione del materiale sul micropiano orientato  $45^\circ$  (micropiano 2 Figura 14). Infatti le direzioni principali dello stato deformativo imposto risultano ruotato di analogo angolo rispetto all'asse normale ( $x$ ). In prossimità del picco di trazione la funzione di splitting tende

rapidamente all'unità (Figura 17) determinando una subitanea trasmigrazione sulla componente *strong* che produce un effetto di scarico sugli altri micropiani.

Ad ulteriore conferma di quanto affermato si riporta in Figura 16 una prova a taglio per due materiali che differiscono solamente per il valore della resistenza a trazione (2.0MPa contro 1.5MPa). Risulta evidente come il materiale più debole mostri una rottura precoce, determinata dal raggiungimento anticipato della propria resistenza a trazione.

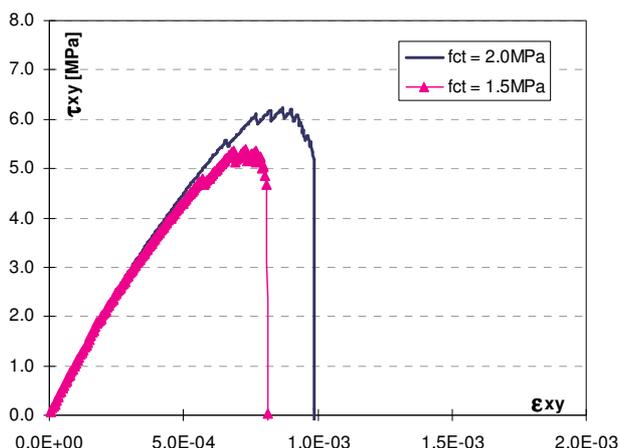


Figura 15. Influenza della resistenza a trazione nella risposta a taglio

Sono state quindi condotte delle prove a taglio variando la componente di compressione assiale. Anche in questi casi il modello ha risposto in maniera coerente col fenomeno fisico, mostrando un incremento della resistenza a taglio al crescere della compressione normale (Figura 16). Infatti l'azione assiale sposta il centro del cerchio di Mohr nel campo di compressione ritardando il raggiungimento di uno stato deformativo di trazione, il materiale di conseguenza riesce a sviluppare una maggiore deformazione tagliante e quindi maggiore resistenza (Figura 17). Si fa notare, inoltre, come anche in presenza di compressione assiale il meccanismo di rottura sia di tipo fragile, sebbene a differenza dal taglio puro la curva di risposta ( $\tau_{xy}-\epsilon_{xy}$ ) mostri un andamento non lineare per cui la massima resistenza tangenziale accenna ad un plateau più marcato (Figura 17). Infatti, mentre nella prova di taglio puro il raggiungimento della resistenza a trazione del micropiano orientato secondo la direzione principale di trazione (micropiano 2, Figura 15) determina il pressoché subitaneo decadimento della risposta macroscopica, la presenza di compressione fa sì che il raggiungimento della massima trazione in un micropiano non produca lo scarico degli altri micropiani. Questi possono proseguire il proprio percorso fino a che non si viene raggiunto uno

stato deformativo di prevalente trazione nel quale la componente *strong* risulta determinate (Figura 17). Quanto affermato viene ben chiarito mettendo a confronto l'andamento del parametro della funzione di splitting relativa alla trazione ( $1-\phi_t$ ) in assenza ed in presenza di compressione (Figura 18).

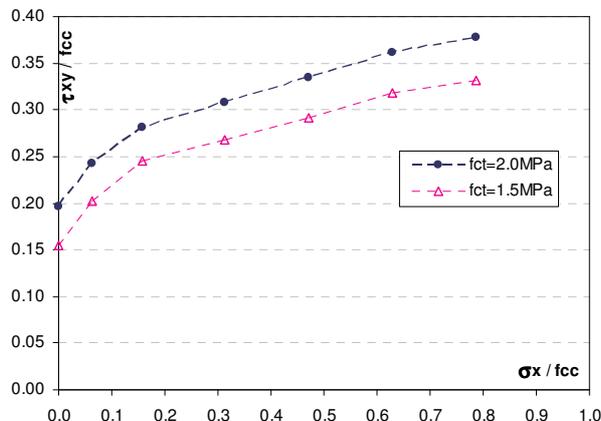


Figura 16. Influenza dello sforzo normale nella risposta a taglio

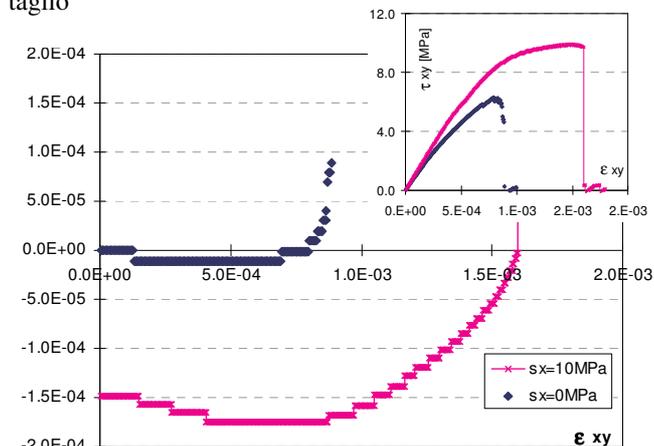


Figura 17. Centro del cerchio di Mohr al crescere della deformazione tagliante in presenza e non di azione normale di compressione

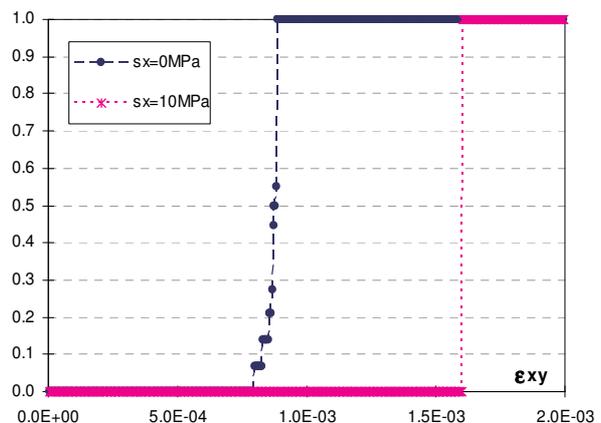


Figura 18. Andamento della funzione di splitting di trazione ( $1-\phi_t$ ) al variare della componente di compressione nella prova di taglio

## 5 CONCLUSIONI

Il modello *microplane* presentato utilizza unicamente le componenti normali ai piani di integrazione, secondo un'ottica per cui tutti i fenomeni critici del calcestruzzo siano riconducibili alla rottura Mode I (trazione) del materiale.

L'efficacia del modello *microplane* presentato è però dovuta principalmente all'introduzione dello *weak & strong splitting*. La partizione in due componenti dello stato deformativo alle quali sono associate delle leggi costitutive completamente differenti è giustificata dalla composizione fisica del calcestruzzo (pasta di cemento ed aggregati). Questa partizione permette di riprodurre la localizzazione delle deformazioni (*weak*) nella pasta di cemento ovvero nell'interfaccia con conseguente scarico della componente *strong* degli aggregati.

Il modello mostra un'ottima capacità di rappresentare i più importanti fenomeni legati alla risposta bidimensionale del calcestruzzo. Relativamente alla risposta a compressione è stato messo in evidenza come l'ottenimento di curve sforzo-deformazione realistiche secondo la direzione del carico, non siano frutto di una forzatura del comportamento del materiale nella direzione ortogonale. Il comportamento biassiale offerto dal modello è corretto, cogliendo gli effetti di dilatazione laterale determinati dal crescere dello schiacciamento. Il modello è capace di rappresentare l'influenza di uno stato di sollecitazione laterale sulla risposta assiale, ponendosi nella condizione di poter simulare gli effetti del confinamento sulla resistenza a compressione. Relativamente al comportamento tagliante del calcestruzzo il modello conduce a risultati molto interessanti. Esso coglie la fragilità del meccanismo, nonché la variabilità della resistenza a seconda delle condizioni al contorno (presenza di compressione assiale).

Tutti i meccanismi di collasso del materiale, sia per schiacciamento che per taglio, sono tuttavia determinati fondamentalmente da un unico parametro, ovvero la resistenza e tenacità a trazione del materiale.

Il comportamento a trazione diretto è ovviamente modellato senza problemi in quanto molto più semplice dei precedenti.

Il modello infine è in grado di sottostare a storie di deformazione di tipo ciclico, offrendosi come strumento ideale nel campo dell'ingegneria sismica. Il modello è già stato implementato nella trave a fibre con modellazione del comportamento tagliante al livello di fibra (Petrangeli et al. 1999).

## REFERENCES

- Bažant, Z.P., and Prat, P.C., 1988. Microplane model for brittle plastic material. I: Theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**(10), 1672-1688.
- Bažant, Z.P., and Prat, P.C., 1988. Microplane model for brittle plastic material. II: Verification. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**(10), 1689-1699.
- Bažant, Z.P., Xiang, Y., Prat, P.C., 1996. Microplane model for concrete. I: stress-strain boundaries and finite strain. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **122**(3), 245-254.
- Bažant, Z.P., Xiang, Y., Prat, P.C., 1996. Microplane model for concrete. II: data delocalization and verification. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **122**(3), 255-262.
- Bažant, Z.P., Caner, F.C., Carol, I., Adley, M.D., Akers, S.A. 2000. Microplane model M4 for concrete. I: Formulation with work-conjugate deviatoric stress. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **126**(9), 944-953.
- Ceb-Fib, Bulletin 45, 2007. Practitioners' guide to finite element modelling of RC structures. State-of-art report.
- Goode, C. D., Helmy, M. A. 1967. The strength of concrete under combined shear and direct stress. *Magazine of Concrete Resistence*, **19**(59), 105-112.
- Kent, C., Park, R., 1971. Flexural Members with Confined Concrete. *Journal of the Structural Division*, **97**(7), 1969-1990.
- Park, R., Priestley, M.J.N., Gill, W.D., 1982. Ductility of Square-Confined Concrete Columns. *Journal of the Structural Division*. **108**(4), 929-950.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N., Park, R. 1988. Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**(8), 1804-1826.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N., Park, R. 1988. Observed Stress-Strain Behavior of Confined Concrete. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **114**(8), 1827-1849.
- Palermo D, Vecchio, F.J. 2003. Compression field modelling of reinforced concrete subjected to reversed loading: Formulation. *ACI Structural Journal*, **100**(5), 616-625.
- Petrangeli, M., Ožbolt, J., Okelo, R., Eligehausen, R., 1993. Mixed method in material modeling of quasibrittle material. Report 4/18-93/8. Institut für Werkstoffe in Bauwesen, Stuttgart University, Germany.
- Petrangeli, M., Pinto, P.E., Ciampi, V., 1999. Fibre element for cyclic bending and shear of rc structures. I Theory, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **125**(9), 994-1001.
- Petrangeli, M., 1999. Fibre element for cyclic bending and shear of rc structures. II Verification. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **125**(9), 1002-1009.
- Popovics, S., 1973. A numerical approach to the complete stress-strain curves of concrete. *Cement and Concrete Research*, **3**(5), 583-599.
- Taylor, G.I., 1938. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, **62**, 307-324.
- Van Mier, J. G. M. 1986. Multiaxial strain-softening of concrete. Part I: Fracture. Part II: Load histories. *Materials and Structures*, **19**(111), 179-200.
- Vecchio, F.J., Collins, P., 1986. The modified compression field theory of reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Structural Journal*, **83**(2), 219-231.
- Vecchio, F.J., De Roo, A., 1995. Smeared crack modelling of concrete tension splitting. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **121**(6), 702-708.